УДК 681.3.681.5

НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ВЗВЕШЕННОГО ГРАФА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МАГУ ПО МИНИМАКСНОМУ КРИТЕРИЮ

В. Г. Кобак, Н. Н. Годицкая

Донской государственный технический университет, (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Работа посвящена нахождению всего множества наименьшего количества цветов хроматических чисел взвешенного графа. В качестве точного алгоритма выбран метод Магу. Для решения неоднородной минимаксной задачи, являющейся одной из задач теории оптимизации, используется алгоритм Плотникова-Зверева.

Ключевые слова: неоднородная минимаксная задача, теория оптимизации, метод Магу, хроматическое число, взвешенный граф, раскраска взвешенного графа.

FINDING ALL CHROMATIC NUMBERS OF A WEIGHTED GRAPH USING THE MAGU METHOD BY THE MINIMAX CRITERION

V. G. Kobak, N. N. Goditskaya

Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

This work is devoted to finding the entire set of the least number of colors of the chromatic numbers of a weighted graph. The Magu method was chosen as the exact algorithm. To solve the inhomogeneous minimax problem, which is one of the problems of the optimization theory, the Plotnikov-Zverev algorithm is used.

Keywords: inhomogeneous minimax problem, optimization theory, Magu method, chromatic numbers, weighted graph, weighted graph coloring.

Введение. Задача раскраски взвешенного графа заключается в том, чтобы определенный набор работы был назначен конкретному временному отрезку таким образом, чтобы две любые работы не выполнялись одновременно, т. е. не конфликтовали, например, при пользовании общих данных. В рассматриваемом случае вершиной графа будет являться каждая из заданных работ, а ребром — каждая конфликтующая пара. Получается, что хроматическим числом взвешенного графа является минимальное время выполнения суммы работ без конфликтов.

Основная часть. Рассматривая математическую постановку задачи, имеем: $G = (X, V)$ — неориентированный связный взвешенный граф с множеством вершин X и множеством ребер V [1]; $W(X_i)$ — вес i-той вершины.

Конкретизируем поставленную задачу. Необходимо раскрасить вершины графа минимальным количеством цветов, т. е. таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены в один цвет. Также максимальная сумма весов вершин одного цвета должна при этом стремиться к минимальному значению:

$$\max_{i \in (1..P)} \sum_{j \in D_i} W(X_j) \to \min,$$

где D_i — подмножество несмежных вершин графа, окрашенных в i-й цвет.

Данная задача принадлежит к классу NP-полных задач, для которых нахождение точного решения невозможно за полиноминальное быстрое время.

Методы раскраски графа. Для решения поставленной задачи будет использоваться точный алгоритм Магу, состоящий из трех этапов.

На первом этапе решается задача поиска максимально внутренне устойчивых подмножеств графа G с помощью метода Магу, используя булевы уравнения [2].

На втором этапе определяется хроматическое число заданного графа. Для этого раннее найденные максимально внутренне устойчивые подмножества с помощью метода Магу проходят преобразования и в конце сортируются по длине множеств по возрастанию. И далее выбираются кортежи, длина которых равна хроматическому числу (т. е. минимальной длине множеств)

На третьем этапе решается задача распределения весов по однородным вычислительным системам N раз, где N — число кортежей, найденных на втором этапе. Для составления матрицы загрузки процессоров в качестве строк берутся вершины графа, в качестве столбцов — цвета раскраски, количество которых было найдено на втором этапе. Если вершина графа является элементом кортежа, тогда ставится вес данной вершины. В ином случае ставится очень большое число (например, «бесконечность»), чтобы вершина не могла быть определена другому цвету. На данном этапе используется метод критического пути с упорядочиванием строк матрицы по количеству «бесконечностей» [3].

Практический пример. Рассмотрим пример, иллюстрирующий решение всей задачи точным алгоритмом. Граф, для которого решается задача, изображен на рис. 1.

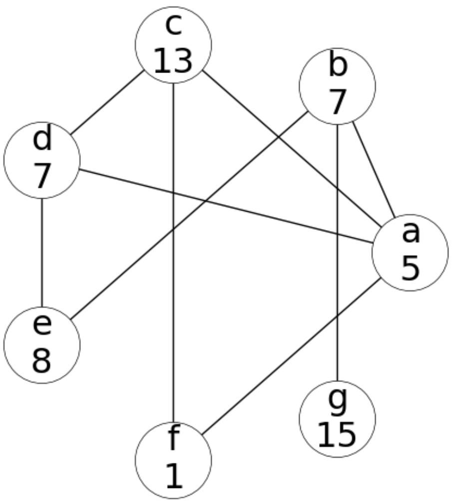

Рис. 1. Рассматриваемый неориентированный взвешенный граф

Найдем все максимально внутренне устойчивые подмножества графа методом Магу. Согласно этому методу, составляется булево уравнение — сумма произведений отрицаний смежных вершин. Формула упрощается по законам A&A = A и A+(A&B) = A. Вершины, отсутствующие в элементах получившегося многочлена, образуют максимально внутренне устойчивые подмножества. Для рассматриваемого графа булева матрица будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ G & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Следовательно, булева формула будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi_s = (\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{e})(\bar{a}+\bar{g})(\bar{b}+\bar{a})(\bar{b}+\bar{e})(\bar{c}+\bar{a})(\bar{c}+\bar{d})(\bar{c}+\bar{f})$$
$$(\bar{c}+\bar{g})(\bar{d}+\bar{c})(\bar{d}+\bar{e})(\bar{d}+\bar{g})(\bar{e}+\bar{a})(\bar{e}+\bar{b})(\bar{e}+\bar{d})(\bar{e}+\bar{f})(\bar{f}+\bar{c})(\bar{f}+\bar{e}) \quad (1)$$

$$(\bar{f}+\bar{g})(\bar{g}+\bar{a})(\bar{g}+\bar{c})(\bar{g}+\bar{d})(\bar{g}+\bar{f})=1$$

Упрощая формулу 1, получаем:

$$\Phi_s = (\bar{a}+\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{f})(\bar{b}+\bar{e}\bar{g})(\bar{c}+\bar{d}\bar{f})(\bar{d}+\bar{e}) = 1$$

Или

$$\Phi_s = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{e}+\bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}+\bar{a}\bar{c}\bar{e}\bar{g}+\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{f}+\bar{a}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}+\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}=1 \quad (2)$$

Таким образом, граф обладает семью максимальными внутренне устойчивыми подмножествами:

$$\{E,F,G\},\{D,F,G\},\{C,E,G\}\,\{B,D,F\},\{A,E,G\},\{B,C\},\{A\}$$

Определим хроматическое число по методу Магу. Используя формулу 2, ее можно представить в следующем виде:

$$\Phi_s = \Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_5+\Phi_6+\Phi_7 = 1$$

Так как

$$\bar{a}\notin\Phi_5,\Phi_7;\ \bar{b}\notin\Phi_4,\Phi_6;\ \bar{c}\notin\Phi_3,\Phi_6;\bar{d}\notin\Phi_2,\Phi_4;\bar{e}\notin\Phi_1,\Phi_3,\Phi_5;$$
$$\bar{f}\notin\Phi_1,\Phi_2,\Phi_4;\ \bar{g}\notin\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_5,$$

то имеем

$$\sum_{y\in A_1} y_a = y_5+y_7, \sum_{y\in A_2} y_a = y_4+y_6, \sum_{y\in A_3} y_a = y_3+y_6, \sum_{y\in A_4} y_a = y_2+y_4,$$
$$\sum_{y\in A_5} y_a = y_1+y_3+y_5, \sum_{y\in A_6} y_a = y_1+y_2+y_4, \sum_{y\in A_7} y_a = y_1+y_2+y_3+y_5;$$

Отсюда:

$$\psi = (y_5+y_7)(y_4+y_6)(y_3+y_6)(y_2+y_4)(y_1+y_3+y_5)(y_1+y_2+y_4)$$
$$(y_1+y_2+y_3+y_5)$$

и

$$\psi = y_2y_5y_6+y_3y_4y_5+y_3y_4y_7+y_4y_5y_6+y_1y_2y_6y_7+y_1y_4y_6y_7+y_2y_3y_6y_7=1$$

Обозначим

$$\psi_1 = y_2y_5y_6, \psi_2 = y_3y_4y_5, \psi_3 = y_3y_4y_7, \psi_4 = y_4y_5y_6, \psi_5 = y_1y_2y_6y_7,$$
$$\psi_6 = y_1y_4y_6y_7, \psi_7 = y_2y_3y_6y_7$$

Тогда

$$\gamma(\bar{G}) = \min_{\lambda}|\psi_\lambda| = 3$$

Таким образом, граф можно раскрасить тремя цветами в соответствии с $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$. То есть хроматические число графа = 3.

Внутренне устойчивые множества:

$$S_1=\{E,F,G\},\quad S_2=\{D,F,G\},\quad S_3=\{C,E,G\},\quad S_4=\{B,D,F\},$$
$$S_5=\{A,E,G\},\ S_6=\{B,C\},\ S_7=\{A\}$$

Исходя из $\psi_1 = y_2y_5y_6$,

$S_2=\{D,F,G\}$

$S_5-S_2=\{A,E\}$

$S_6-S_5-S_2=\{B,C\}$

Исходя из $\psi_2 = y_3y_4y_5$:

$S_3=\{C,E,G\}$

$S_4-S_3=\{B,D,F\}$

$S_5 - S_4 - S_3 = \{A\}$

Исходя из $\psi_3 = y_3 y_4 y_7$:
$S_3 = \{C, E, G\}$
$S_4 - S_3 = \{B, D, F\}$
$S_7 - S_4 - S_3 = \{A\}$

Исходя из $\psi_4 = y_4 y_5 y_6$:
$S_4 = \{B, D, F\}$
$S_5 - S_4 = \{A, E, G\}$
$S_6 - S_5 - S_4 = \{C\}$

Таким образом, найдены четыре варианта раскраски неориентированного взвешенного графа, которые мы будем использовать в алгоритме «Критического пути» для распределения загрузок по процессорам.

Составим матрицу загрузки для первой раскраски графа:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 13 \\ 7 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & \infty \\ 1 & \infty & \infty \\ 15 & 15 & \infty \end{vmatrix}$$

Загрузка процессоров (веса цветов в раскраске) будет следующей: $T_1 = 23$, $T_2 = 13$, $T_3 = 20$. Максимальное значение = 23

Матрица загрузки для второй раскраски графа:

$$A_2 = \begin{vmatrix} \infty & \infty & 5 \\ \infty & 7 & \infty \\ 13 & \infty & \infty \\ \infty & 7 & \infty \\ \infty & 1 & \infty \\ 8 & \infty & 8 \\ 15 & \infty & 15 \end{vmatrix}$$

Загрузка процессоров: $T_1 = 28$, $T_2 = 15$, $T_3 = 13$. Максимальное значение = 28.

Матрица загрузки для третьей раскраски графа:

$$A_3 = \begin{vmatrix} \infty & \infty & 5 \\ \infty & 7 & \infty \\ 13 & \infty & \infty \\ \infty & 7 & \infty \\ 8 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty \\ 15 & \infty & \infty \end{vmatrix}$$

Загрузка процессоров: $T_1 = 36$, $T_2 = 15$, $T_3 = 5$. Максимальное значение = 36.

Матрица загрузки для второй раскраски графа:

$$A_4 = \begin{vmatrix} \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 13 \\ 7 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & \infty \\ 1 & \infty & \infty \\ \infty & 15 & \infty \\ 7 & \infty & 7 \end{vmatrix}$$

Загрузка процессоров: $T_1 = 15$, $T_2 = 28$, $T_3 = 13$. Максимальное значение = 28.

Лучшее время из значений [23, 28, 36, 28] = 23.

Таким образом, оптимальный вариант для раскраски: вершины d, f, g красятся в один цвет; e, a — во второй; b, c — в третий. То есть раскрашенный граф будет иметь вид, представленный на рис. 2.

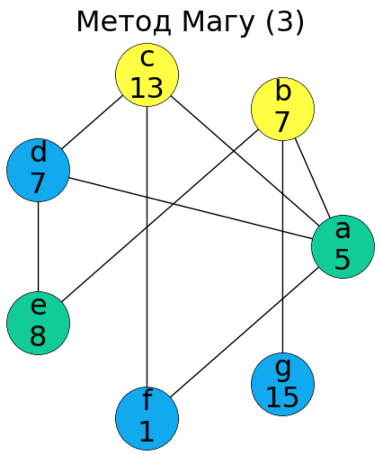

Рис. 2. Оптимальная раскраска графа

Вычислительный эксперимент. Сравним эффективность и скорость метода Магу с увеличением количества вершин.

Для вычислительного эксперимента было реализовано программное средство. Для каждого эксперимента было сгенерировано 50 обыкновенных неориентированных графов, в каждом из которых случайным образом задавалась матрица смежности и случайное значение веса на каждую вершину. Значение веса задается в диапазоне от 10 до 25.

Полученные результаты экспериментов представлены в таблицах ниже. Количество вершин взято 10, 11, 12.

В таблице 1 представлены результаты среднего времени работы алгоритма, в зависимости от заданного количества вершин.

Таблица 1

Показания времени получения результата

Количество вершин	Среднее время работы (сек)
10	1,369
11	12,575
12	23,387

В таблице 2 представлены результаты среднего значения T_{max}, полученного в результате работы алгоритма.

Таблица 2

Показания среднего значения T_{max}

Количество вершин	Среднее T_{max}
10	54,68
11	54,74
12	54,8

В таблице 3 представлены результаты среднего количества цветов, в которые окрашивается граф после выполнения алгоритма раскраски.

Таблица 3

Показания среднего количества цветов

Количество вершин	Среднее количество цветов
10	3,9
11	4,2
12	4,7

Заключение. С помощью метода Магу можно найти «точный» результат всего множества наименьшего количества цветов хроматических чисел взвешенного графа, которые впоследствии можно использовать для нахождения «минимаксной» раскраски графа.

Библиографический список.

1. Жигалова, Е. Ф. Дискретная математика / Е. Ф. Жигалова. — Томск: Эль Контент, 2014. — 98 с.

2. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. — Москва : Наука, 1975 — 480 с.

3. Мерзленко, А. С. Сравнительный анализ алгоритмов раскраски обыкновенного взвешенного графа / А. С. Мерзленко, В. Г. Кобак // Вестник Донского государственного технического университета. — 2014. — Т. 14. — № 2(77). — С. 164–170. https://doi.org/10.12737/454610.12737/4546

Об авторах:

Кобак Валерий Григорьевич, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор технических наук, профессор, valera33305@mail.ru

Годицкая Наталия Николаевна, бакалавр кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ngoditskaya@mail.ru

About the Authors:

Kobak, Valeriy G., Professor, Department of Computer and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Dr. Sci., Professor, valera33305@mail.ru

Goditskaya, Nataliya N., Bachelor's degree student, Department of Computer and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ngoditskaya@mail.ru