

УДК 621.833.15

## ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ С РАЗДЕЛЕННЫМ ПОТОКОМ МОЩНОСТИ

*А. В. Кулинич, А. М. Петров*

Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Приводится решение задачи оптимизации двухступенчатой зубчатой передачи с разделяющимся потоком мощности по критерию минимальной массы колесной группы. Выведено выражение для целевой функции и сформулировано основное условие оптимизации: равнопрочность зубьев колес по напряжениям изгиба. Представлена система дополнительных условий и ограничений, которым должно удовлетворять решение вариационной задачи. Полученные результаты позволяют наиболее рациональным образом разбивать общее передаточное число передачи между ее ступенями.

**Ключевые слова:** зубчатая передача, поток мощности, передаточное число, оптимизация, целевая функция.

## OPTIMIZATION OF TWO-STAGE GEAR TRANSMISSION WITH SPLIT POWER FLOW

*A. V. Kulinich, A. M. Petrov*

Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

The article provides a solution to the optimization problem for a two-stage gear transmission with a split power flow according to the criterion of the minimum mass of the wheel group. An expression for the objective function is derived and the main optimization condition is formulated: equal strength of the teeth of the wheels in terms of bending stresses. Also, a system of additional conditions and constraints has been determined that must be satisfied by the solution of the variation problem. The results obtained allow the most rational way to divide the total gear ratio of the transmission between its stages.

**Keywords:** gear transmission, power flow, gear ratio, optimization, objective function.

**Введение.** Передаточные механизмы, в частности зубчатые передачи, являются неотъемлемой частью привода большинства машин. Благодаря широкому применению зубчатых передач в машиностроении приобретает особую актуальность задача оптимизации их конструкции, а именно: снижение массогабаритных показателей и улучшение рабочих характеристик. Одна из целей таких преобразований — уменьшение массы колесной группы передачи. Вклад в общую массу передачи массы других деталей и узлов (корпуса, опор, валов и др.) достаточно сложно оценить ввиду их конструктивного разнообразия. Основные же детали передачи — зубчатые колеса имеют достаточно простую форму, облегчающую анализ и нахождение математических зависимостей между задействованными параметрами.

### Основная часть

**Общая постановка задачи. Выбор целевой функции.** Кинематическая схема двухступенчатой цилиндрической косозубой передачи представлена на рис. 1.

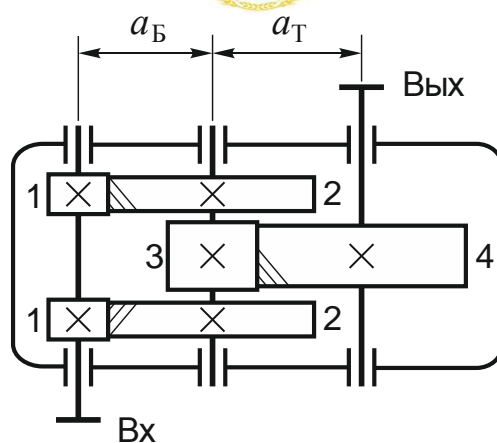


Рис. 1. Кинематическая схема передачи

На схеме обозначены входной и выходной валы, а также зубчатые колеса. Две шестерни 1 и два колеса 2 образуют раздвоенную быстроходную ступень (Б) передачи. Шестерня 3 и колесо 4 образуют тихоходную ступень (Т). Межосевые расстояния ступеней обозначены  $a_B$  и  $a_T$ .

При проектировании двухступенчатых зубчатых передач приходится сталкиваться с проблемой разбиения общего передаточного числа  $U$  между отдельными ступенями. Если обозначить передаточные числа быстроходной и тихоходной ступеней  $u_B$  и  $u_T$ , общее передаточное число определится формулой

$$U = u_B u_T. \quad (1)$$

От рационального выбора соотношения передаточных чисел ступеней во многом зависят массогабаритные показатели изделия и его рабочие характеристики. Авторы [1], рассматривая постановку задачи оптимизации двухступенчатой передачи, в качестве критерия оптимальности приняли минимум значения суммарного межосевого расстояния  $a_\Sigma$ . Исследователи исходили из того, что масса передачи напрямую зависит от параметра  $a_\Sigma$  и при его минимальном значении также будет минимальной.

Отличительная особенность предлагаемой постановки задачи заключается в том, что в качестве минимизируемого параметра выбрано не межосевое расстояние, а суммарная масса  $M_\Sigma$  основных деталей передачи — зубчатых колес, т. е. масса колесной группы. Такой выбор обусловлен, с одной стороны, относительной простотой конструкции колес, а с другой — неочевидностью опосредованных связей между массой передачи и ее суммарным межосевым расстоянием.

Суммарную массу колесной группы  $M_\Sigma$  после установления зависимости от варьируемых параметров примем в качестве целевой функции  $g$ . Варьируемые параметры — передаточные числа  $u_B$  и  $u_T$ , которые очевидным образом зависят от чисел зубьев  $z_k$  колес, где  $k$  — номер колеса по схеме (рис. 1):

$$u_B = \frac{z_2}{z_1}; \quad u_T = \frac{z_4}{z_3}. \quad (2)$$

Будем считать, что колеса передачи имеют форму круглых дисков, масса которых может быть найдена умножением плотности материала  $\rho$  на объем  $V$ :

$$M_k = \rho V_k = \frac{\pi \rho}{4} d_k^2 b_k,$$

где  $d_k$  — делительный диаметр;  $b_k$  — толщина колеса (или ширина зубчатого венца).

Делительные диаметры косозубых колес определяются числом зубьев  $z$ , углом  $\beta$  наклона зубьев к образующей делительного цилиндра и модулем  $m$  зацепления:

$$d_k = \frac{m z_k}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Запишем выражения для целевой функции:

$$g = M_{\Sigma} = 2M_1 + 2M_2 + M_3 + M_4;$$

$$g = \frac{\pi\rho}{4} (2d_1^2 b_1 + 2d_2^2 b_2 + d_3^2 b_3 + d_4^2 b_4);$$

$$g = \frac{\pi\rho}{4} (2\Psi_{bdB} d_1^3 + 2\Psi_{bdB} d_2^2 d_1 + \Psi_{bdT} d_3^3 + \Psi_{bdT} d_4^2 d_3).$$

Здесь  $\Psi_{bd} = b/d_{ш}$  — коэффициент ширины венца колеса по диаметру шестерни. Также учтено, что при твердости рабочих поверхностей зубьев более 350 НВ ширину венцов шестерен и колес принимают одинаковой:  $b_1 = b_2$ ;  $b_3 = b_4$ .

С учетом формул (2) и (3) целевая функция принимает вид:

$$g = \frac{\pi\rho}{4} \left( \frac{2\Psi_{bdB}}{\cos\beta_B} m_B^3 z_1^3 + \frac{2\Psi_{bdB}}{\cos\beta_B} u_B^2 m_B^3 z_1^3 + \frac{\Psi_{bdT}}{\cos\beta_T} m_T^3 z_3^3 + \frac{\Psi_{bdT}}{\cos\beta_T} u_T^2 m_T^3 z_3^3 \right). \quad (4)$$

**Связи и ограничения.** После того как вид целевой функции установлен, необходимо выявить возможные связи между задействованными в (4) параметрами, а также сформировать систему ограничений, которым должно удовлетворять решение вариационной задачи.

Введем ограничения по прочности зубьев. Особенность расчета колес, изготовленных из материалов с поверхностной твердостью зубьев по Бринеллю более 350 НВ, состоит в том, что фактором, ограничивающим прочность зубьев, зачастую является их выносливость при изгибе. Этим они отличаются от колес из материалов с поверхностной твердостью менее 350 НВ, для которых прочностной расчет ведут, как правило, по условию контактной выносливости.

Запишем условие выносливости зубьев при изгибе [2]:

$$\sigma_F = Y_{F\beta} \frac{Y_F F_t K_F}{bm} \leq [\sigma_F], \quad (5)$$

где  $\sigma_F$  и  $[\sigma_F]$  — расчетное и допускаемое напряжения изгиба в опасном сечении ножки зуба;  $Y_{F\beta}$  — коэффициент повышения прочности косозубых передач по напряжениям изгиба;  $Y_F$  — коэффициент формы зуба;  $F_t$  — окружная сила в зацеплении;  $K_F$  — коэффициент расчетной нагрузки при расчете на выносливость при изгибе;  $b$  — ширина зубчатого венца колеса.

Условию (5) можно придать более удобную форму:

$$\sigma_F = 2T_{ш} Y_{F\beta} \frac{Y_F K_F}{m^3 z_{ш}^2 \Psi_{bd}} \leq [\sigma_F], \quad (6)$$

где  $T_{ш}$  — вращающий момент на шестерне;  $z_{ш}$  — число ее зубьев.

Условие контактной выносливости зубьев для косозубых передач внешнего зацепления имеет вид [2]:

$$\sigma_H = 1,18 Z_{H\beta} \sqrt{\frac{E T_{ш} K_H}{d_{ш}^2 b \sin 2\alpha} \left( \frac{u+1}{u} \right)} \leq [\sigma_H], \quad (7)$$

где  $\sigma_H$  и  $[\sigma_H]$  — расчетное и допускаемое контактные напряжения;  $Z_{H\beta}$  — коэффициент повышения прочности косозубых передач по контактным напряжениям;  $K_H$  — коэффициент расчетной нагрузки при расчете на контактную выносливость;  $E$  — модуль Юнга материала колес;  $\alpha$  — угол зацепления.

Сравнивая расчетные контактные и изгибные напряжения в (6) и (7) и учитывая очевидную связь  $T_{ш} = F_t \cdot 0,5d_{ш}$ , получим пропорциональную зависимость их отношения от основных параметров передачи:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_F} \sim \sqrt{bm \frac{E}{T_{ш}}}.$$

Данная зависимость показывает, что с уменьшением модуля и ширины колес изгибные напряжения в зубьях растут по отношению к контактным напряжениям. Следовательно, для

мелкомодульных передач с относительно узкими колесами изгибная прочность зубьев может стать лимитирующим фактором, особенно для колес с повышенной твердостью поверхности зубьев, имеющих высокие значения допустимого контактного напряжения  $[\sigma_H]$ . В свете вышесказанного при оптимизации схемы передачи будем исходить из равнопрочности зубьев колес ступеней по *изгибным* напряжениям.

Запишем условие (6) применительно к шестерням обеих ступеней передачи в виде:

$$2T_{шБ} Y_{F\beta B} \frac{Y_{F1} K_{FB}}{m_B^3 z_1^2 \Psi_{bdB}} - [\sigma_F]_1 \leq 0, \quad (8)$$

$$2T_{шТ} Y_{F\beta T} \frac{Y_{F3} K_{FT}}{m_T^3 z_3^2 \Psi_{bdT}} - [\sigma_F]_3 \leq 0.$$

Согласно принципу равнопрочности ступеней передачи, когда нагрузка ( $T_{шБ}$ ,  $T_{шТ}$ ) достигает максимально допустимых значений, неравенства (8) одновременно обращаются в равенства.

Следуя алгоритму, изложенному в [1], для упрощения примем входящие в (8) коэффициенты  $Y_{F\beta}$  и  $K_F$  в качестве параметров состояния, т. е. неварьируемых величин, произведения которых для обеих ступеней передачи примерно равны. Это допущение можно записать так:

$$Y_{F\beta B} K_{FB} = Y_{F\beta T} K_{FT}. \quad (9)$$

Отношение  $Y_{F\beta B} K_{FB} / (Y_{F\beta T} K_{FT})$  зависит от особенностей конструкции той группы передач, в границах которой решается задача оптимизации. В предлагаемой задаче с целью определенности оно принято равным единице, что и отражено в (9).

Вращающие моменты на валах шестерен обеих ступеней также связаны друг с другом. Пренебрегая потерями энергии в зацеплении, имеем:

$$T_3 - T_1 u_B = 0.$$

Естественно, что вращающие моменты, приложенные к самим шестерням, должны учитывать раздвоенность быстроходной ступени передачи:

$$T_{шБ} = 0,5T_1; \quad T_{шТ} = T_3.$$

Следовательно,

$$\frac{T_{шТ}}{T_{шБ}} = 2u_B. \quad (10)$$

Общее передаточное число механизма связано с передаточными числами ступеней:

$$U - u_B u_T = 0. \quad (11)$$

В качестве дополнительных условий синтеза оптимальной схемы передачи следует принять следующие ограничения:

— коэффициенты ширины колес по диаметру шестерен должны находиться в рекомендуемом для передач данного вида диапазоне

$$\Psi_{bd} \in [0,4; 0,9] \quad (12)$$

(для каждого из колес раздвоенной быстроходной ступени следует брать половинное значение);

— передаточное число каждой ступени

$$\in [3; 8]; \quad (13)$$

— число зубьев шестерен

$$z_{ш} \in [13; 25]; \quad (14)$$

— модули зацепления ступеней должны быть дискретизированы в соответствии с ГОСТ 9563-80:

$$m \text{ (мм)} = 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00; 2,50; 2,75; 3,00; 3,50; 4,00; \dots \quad (15)$$

В общей постановке задача нахождения оптимальных передаточных чисел  $u_B$  и  $u_T$  ступеней осложняется слишком большим числом параметров, выбор значений которых так или иначе будет влиять на результат. Чтобы обойти возникающие трудности, следует понизить размерность задачи, введя несколько упрощений. Первое: принять числа зубьев шестерен, а также углы наклона зубьев одинаковыми:  $z_1 = z_3$ ;  $\beta_B = \beta_T$ . При этом, если нарезка ведется без коррекции, будут равны и коэффициенты формы зубьев:  $Y_{F1} = Y_{F3}$ . В отличие от шестерен числа зубьев колес будут различными в силу различия передаточных чисел ступеней.

Второе упрощение: приравняем суммарные коэффициенты ширины колес отдельных ступеней:  $2\Psi_{bdB} = \Psi_{bdT}$ . Здесь множитель 2 учитывает раздвоенность колеса быстроходной ступени.

Третье упрощение связано с оценкой отношения допускаемых изгибных напряжений, величина которых для отдельно взятой ступени зависит главным образом от ее ресурса.

Допускаемые напряжения при расчете на изгибную выносливость зубьев определяют по формуле из [3]:

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{F \lim} Y_N Y_R Y_A}{S_F}, \quad (16)$$

где  $\sigma_{F \lim}$  — предел изгибной выносливости, соответствующий базовому числу циклов перемен напряжений;  $Y_N$  — коэффициент долговечности, учитывающий влияние ресурса;  $Y_R$  — коэффициент, учитывающий влияние шероховатости переходной поверхности между зубьями;  $Y_A$  — коэффициент, учитывающий влияние реверса нагрузки;  $S_F$  — коэффициент запаса прочности.

Если колеса имеют одинаковую термическую обработку и технологию изготовления, все перечисленные параметры можно принять одинаковыми. Исключение — коэффициенты долговечности  $Y_N$ , значения которых для колес из материалов III, IV и V групп с высокой твердостью поверхности зубьев (более 350 НВ) пропорциональны  $1/\sqrt[9]{n}$ , где  $n$  — частота вращения соответствующего колеса. Следовательно, отношение допускаемых напряжений шестерен ступеней:

$$\frac{[\sigma_F]_1}{[\sigma_F]_3} = \sqrt[9]{\frac{n_3}{n_1}} = (u_B)^{-\frac{1}{9}}. \quad (17)$$

Запишем функционал (4) с учетом принятых упрощений:

$$g = \frac{\pi \rho}{2} \frac{\Psi_{bdB}}{\cos \beta_B} m_B^3 z_1^3 \left[ 1 + u_B^2 + \frac{m_T^3}{m_B^3} (1 + u_T^2) \right].$$

Входящее в это выражение отношение кубов модулей зацепления ступеней с привлечением формул (8)–(10), (17) и равенств

$$z_1 = z_3; \beta_B = \beta_T; 2\Psi_{bdB} = \Psi_{bdT}$$

преобразуется к виду

$$\frac{m_T^3}{m_B^3} = \frac{T_{шТ}}{T_{шБ}} \cdot \frac{[\sigma_F]_1}{[\sigma_F]_3} \cdot \frac{\Psi_{bdB}}{\Psi_{bdT}} = 2u_B \cdot (u_B)^{-\frac{1}{9}} \cdot 0,5 = (u_B)^{\frac{8}{9}}. \quad (18)$$

Соответственно, для выражения целевой функции имеем

$$g = \frac{\pi \rho}{2} \frac{\Psi_{bdB}}{\cos \beta_B} m_B^3 z_1^3 \left[ 1 + u_B^2 + (u_B)^{\frac{8}{9}} (1 + u_T^2) \right]. \quad (19)$$

**Синтез оптимальной схемы передачи.** Из входящих в выражение (19) параметров варьированию подлежат передаточные числа  $u_B$  и  $u_T$ , в то время как модуль  $m_B$ , число зубьев  $z_1$ , угол наклона зубьев  $\beta_B$  и коэффициент ширины  $\psi_{bdB}$  являются фиксированными параметрами состояния, не участвующими в процедуре варьирования.

Связь (11) между варьируемыми параметрами позволяет уменьшить размерность задачи, если с ее помощью выразить передаточное число тихоходной ступени:

$$u_T = \frac{U}{u_B}. \quad (20)$$

Подстановка этого выражения в (19) дает

$$g = \frac{\pi\rho}{2} \frac{\psi_{bdB}}{\cos\beta_B} m_B^3 z_1^3 \left[ 1 + u_B^2 + (u_B)^{\frac{8}{9}} + (u_B)^{-\frac{10}{9}} U^2 \right]. \quad (21)$$

Условие минимума целевой функции (21) — равенство нулю ее производной по параметру  $u_B$ . Применяв это условие, получим

$$u_B + 4(u_B)^{-\frac{1}{9}} - 5(u_B)^{-\frac{19}{9}} U^2 = 0. \quad (22)$$

Решением этого уравнения при заданном значении общего передаточного числа  $U$  является оптимальное передаточное число  $u_B$  быстроходной ступени передачи. После определения  $u_B$  передаточное число  $u_T$  тихоходной ступени легко находится с помощью формулы (20).

Для численного определения корней уравнения (22) использован алгоритм половинного деления. Он реализован в программе Root, составленной на языке программирования Фортран-90. Результаты расчета оптимального разбиения общего передаточного числа по ступеням представлены в табл. 1.

Таблица 1

Разбиение общего передаточного числа по ступеням передачи

$U$	8	10	12,5	16	20	25	31,5	40
$u_B$	3,030	3,518	4,080	4,804	5,564	6,442	7,493	8,758
$u_T$	2,640	2,843	3,064	3,331	3,594	3,881	4,204	4,567
$k$	0,933	0,899	0,867	0,833	0,804	0,776	0,749	0,722

Полученные значения оптимальных передаточных чисел отличаются от известного решения аналогичной задачи в [1], где за критерий оптимальности принимался минимум суммарного межосевого расстояния, а постановка не учитывала косоизгибность колес и влияние ресурса на изгибную прочность зубьев. Как видно из таблицы, при всех значениях  $U$  передаточное число быстроходной ступени больше передаточного числа тихоходной ступени.

В упрощенной методике расчета, широко представленной в учебной литературе, в частности в пособиях [3–5], для цилиндрических двухступенчатых редукторов дается общая рекомендация разбиения передаточных чисел:

$$u_T = k\sqrt{U}; \quad u_B = \frac{\sqrt{U}}{k}.$$

Здесь для редукторов развернутой схемы  $k = 0,88$  независимо от значения  $U$ .

В предлагаемом варианте коэффициент  $k$  зависит от общего передаточного числа  $U$ . Соответствующие значения приведены в нижней строке табл. 1.

Определенный интерес представляет зависимость целевой функции (21) от варьируемого параметра  $u_B$ . Подобные зависимости для передач с различными передаточными числами представлены на рис. 2.

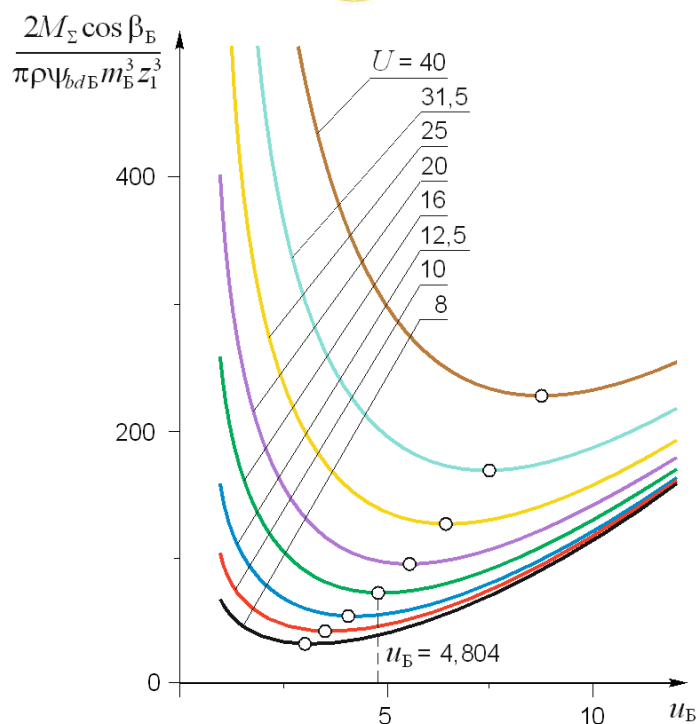


Рис. 2. Графики целевой функции (21), построенные для различных значений общего передаточного числа  $U$

График каждой кривой имеет ярко выраженный минимум при значении  $u_B$ , соответствующем данным табл. 1. Значение ординаты точки минимума пропорционально суммарной массе колесной группы  $M_\Sigma$ , для нахождения которой достаточно умножить это значение на  $\pi\rho\psi_{bdB}m_B^3z_1^3/(2\cos\beta_B)$ .

**Заключение.** Итоги исследования представлены формулами (21), (22), табл. 1 и графиками на рис. 2. Эти результаты могут быть использованы при конструировании двухступенчатых цилиндрических передач, для которых лимитирующий фактор работоспособности — усталостная прочность зубьев по напряжениям изгиба.

#### Библиографический список

1. Иосилевич, Г. Б. Детали машин : учеб. для студ. машиностроит. спец. вузов / Г. Б. Иосилевич. — Москва : Машиностроение, 1988. — 368 с.
2. Петров, А. М. Детали машин : учеб. для курсантов вузов ракетных войск / А. М. Петров. — Ростов-на-Дону : Изд-во РВИРВ, 2011. — 278 с.
3. Дунаев, П. Ф. Конструирование узлов и деталей машин : учеб. пособ. для студ. высш. учеб. заведений / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. — Москва : Академия, 2009. — 496 с.
4. Расчет и проектирование деталей машин : учеб. пособ. / А. А. Андросов, Ю. Е. Андрущенко, А. Г. Дьяченко [и др.] ; под общ. ред. А. А. Андросова. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2006. — 285 с.
5. Иванов, М. Н. Детали машин : учеб. для машиностроит. спец. вузов / М. Н. Иванов, В. А. Финогенов. — Москва : Высшая школа, 2007. — 408 с.



*Об авторах:*

**Кулинич Александр Владимирович**, магистрант кафедры «Основы конструирования машин» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [71Sany71@gmail.com](mailto:71Sany71@gmail.com)

**Петров Андрей Михайлович**, доцент кафедры «Основы конструирования машин» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, [petrov\\_a\\_m@mail.ru](mailto:petrov_a_m@mail.ru)

*Authors:*

**Kulinich, Aleksandr V.**, Master's Degree Student, the Department of «Fundamentals of Machine Design», Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, RF, 344003), [71Sany71@gmail.com](mailto:71Sany71@gmail.com)

**Petrov, Andrei M.**, Associate Professor, the «Department of Fundamentals of Machine Design», Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, RF, 344003), [petrov\\_a\\_m@mail.ru](mailto:petrov_a_m@mail.ru)