

УДК 624.074

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЗШИХ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК УСЛОЖНЕННОЙ ФОРМЫ

В. Д. Еремин

Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Рассматривается методика определения значений собственных колебаний тонкой упругой волнистой оболочки открытого профиля. В основу предлагаемой методики определения численных значений низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек усложненной формы положен энергетический метод Рэлея-Ритца. Приведены результаты численного расчета этой тонкой волнистой оболочки с шарнирно-неподвижным закреплением по нижнему контуру вдоль образующей. Дана оценка результатов этого численного эксперимента.

Ключевые слова: тонкая упругая волнистая оболочка, частота и форма собственных колебаний, энергетический метод.

INVESTIGATION OF THE NUMERICAL CONVERGENCE OF DETERMINING THE LOWEST FREQUENCIES OF NATURAL OSCILLATIONS OF SHELLS OF A COMPLICATED SHAPE

V. D. Eremin

Don State Technical University, (Rostov-on-Don, Russian Federation)

The article considers the problem of natural oscillations of a thin elastic wavy shell of an open profile. The proposed methodology for determining the numerical values of the lowest frequencies and the corresponding forms of natural oscillations of shells of a complicated form is based on the Rayleigh-Ritz energy method. The results of numerical calculation of this thin wavy shell with hinge-fixed fastening along the lower contour along the generatrix are presented. The results of this numerical experiment are evaluated.

Keywords: thin elastic wavy shell, frequency and shape of natural oscillations, energy method.

Введение. Одним из основных направлений научно-технического прогресса в строительстве и архитектуре является создание новых, более совершенных промышленных конструкций.

Опыт строительства в нашей стране и за рубежом указывает на перспективность применения оболочек усложненной формы, в том числе и волнистых оболочек, в качестве покрытий общественных, производственных, складских и сельскохозяйственных зданий и сооружений. Цель данного исследования — разработка методики определения численных значений низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких оболочек сложной формы энергетическим методом, которая могла бы применяться в проектной практике.

Основная часть. Создание новых, более совершенных инженерных конструкций привело к необходимости разработки теории расчета оболочек сложного строения: слоистых и гофрированных, волнистых и подкрепленных стержневым набором.

Во многих случаях конструкции подвергаются воздействию периодических и импульсивных нагрузок, особенно в сейсмических районах, поэтому умение определять

собственные частоты колебаний оболочек со сложной геометрией имеет очень важное практическое значение.

Теория расчета тонких оболочек разработана достаточно хорошо, так что имеется полная возможность рассчитать, а затем и спроектировать сооружения и конструкции в виде оболочек сложных очертаний [1].

Однако, анализируя научные работы, посвященные вопросам динамики оболочек, легко заметить наличие сравнительно небольшого количества исследований по расчету собственных колебаний оболочек неклассической формы.

Предлагается методика определения численных значений низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких оболочек сложной формы энергетическим методом, приемлемая для использования в проектной практике. Достоинство применяемого метода состоит в том, что он не требует составления и решения особых дифференциальных уравнений с граничными и начальными условиями, которые в ряде случаев оказываются весьма сложными и часто трудно разрешимыми.

При решении задачи с помощью энергетического метода Релея-Ритца необходимо иметь мощное множество функций, характеризующих перемещения срединных точек оболочки, удовлетворяющих только геометрическим условиям задачи.

Постановка задачи. Рассматривается задача о собственных колебаниях тонкой упругой некруговой цилиндрической волнистой оболочки открытого профиля с шарнирно-неподвижным опиранием по нижнему контуру вдоль образующей (рис. 1).

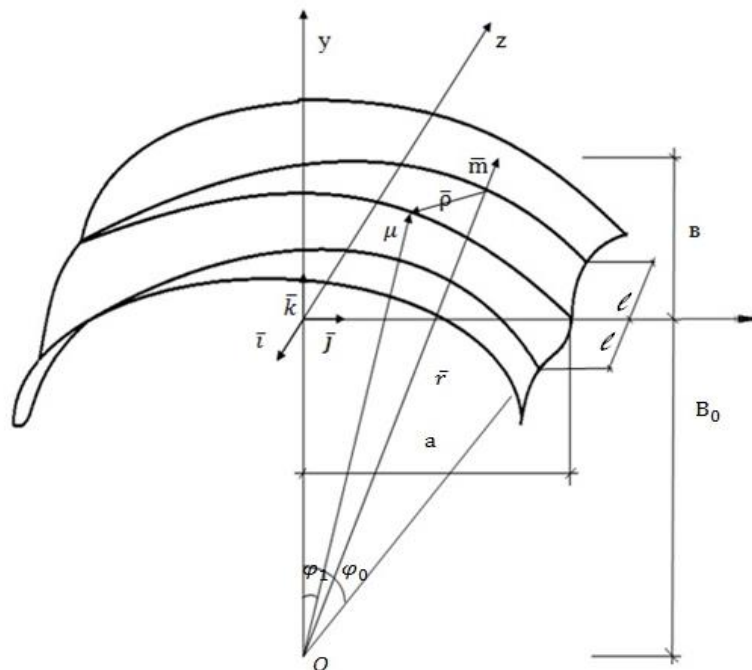


Рис. 1. Поверхность оболочки

В основу задачи положен энергетический метод Релея-Ритца. На основе предложенной методики определения низших частот и форм свободных колебаний оболочек усложненной формы проведено исследование численной сходимости разработанного алгоритма.

Срединная поверхность этой оболочки образована перемещением косинусоиды:

$$\alpha = -\Delta \left(1 - \cos \pi \frac{z}{l}\right) \quad (1)$$

вдоль гребня, описанного уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^3} = 1, \quad (2)$$

и лежащей в нормальной плоскости к нему.

Здесь Δ – амплитуда волны; 2ℓ – длина волны.

Геометрические характеристики (размеры оболочки):

– пролет — $2a = 18$ м;

– высота в поперечном сечении, проходящем через гребень оболочки — $v = 5$ м;

– длина волны — $2\ell = 3$ м;

— амплитуда волны — $\Delta = 0,225$ м; (3)

– полюсное расстояние — $B_0 = 9$ м;

– толщина оболочки — $2h = 0,05$ м.

Физические характеристики:

– модуль упругости материала оболочки — $E = 28$ ГПа;

— коэффициент Пуассона — $\mu = \frac{1}{6}$; (4)

– плотность материала оболочки — $\rho = 2500$ кг/м³.

В работе продолжается исследование численной сходимости разработанного алгоритма определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких оболочек усложненной формы с различными граничными условиями.

Расчет выполняется на основе геометрической и физической линейности с использованием гипотез Кирхгофа-Лява. Используется энергетический метод Релея-Ритца, позволяющий получить достаточно точные значения низших частот и форм собственных колебаний тонких оболочек усложненной формы при произвольных граничных условиях и при любом законе изменения ее геометрических и физических характеристик [2–3].

Решение численного примера. Предполагается, что длина оболочки вдоль оси Z достаточно велика, поэтому можно ограничиться рассмотрением только ее средних участков, не учитывая влияние частей оболочки, примыкающих к ее торцам (рис. 1).

Получено векторное уравнение срединной поверхности этой оболочки. Выведены формулы для вычисления параметров Ляме и символов Кристоффеля данной оболочки [4].

Подобраны функции, аппроксимирующие амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат, в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющие граничному условию — шарнирно-неподвижному опиранию по нижнему контуру вдоль образующей ($\alpha_2 = \pm 1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$) [5] (рис. 2).

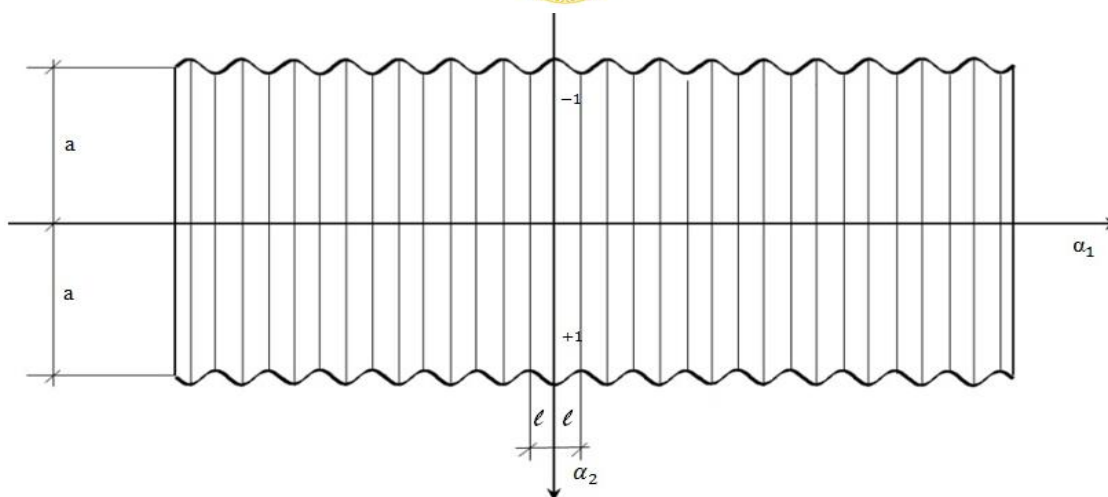


Рис. 2. Расчетная схема оболочки

По формулам, приведенным в [6–7], вычислены все элементы матриц S и I , входящих в формулы для вычисления амплитуд потенциальной и кинетической энергий деформации этой волнистой оболочки, а также в формулу обобщенного векового уравнения.

Решив это обобщенное вековое уравнение, получили низшие частоты и соответствующие им формы собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки с шарнирно-неподвижным опиранием по нижнему контуру вдоль образующей.

Исследование численной сходимости алгоритма расчета. Энергетический метод Релея-Ритца, положенный в основу предлагаемого алгоритма определения частот и форм собственных колебаний тонких оболочек усложненной формы, имеет строгое математическое обоснование. Сходимость этого метода подробно рассматривалась Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым [8].

Для контроля численной сходимости предлагаемого алгоритма расчет волнистой оболочки, изображенной на рис. 1, с геометрическими размерами (3) и физическими характеристиками (4) производился методом последовательных приближений и путем поэтапного увеличения количества членов ряда, аппроксимирующего решение.

В первом приближении в двойных тригонометрических рядах, аппроксимирующих перемещения, было оставлено четыре члена ($m = n = 2$), потом девять ($m = n = 3$), шестнадцать ($m = n = 4$), двадцать пять ($m = n = 5$) и, наконец, тридцать шесть членов ряда ($m = n = 6$).

Результаты вычисления первых трех частот этой волнистой оболочки для варианта граничных условий — шарнирно-неподвижное опирание оболочки по нижнему контуру вдоль образующей (рис. 2) — приведены на графиках 1–3 (рис. 3–5).

На этих графиках:

n – номер приближения;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – частоты собственных колебаний тонкой волнистой оболочки.

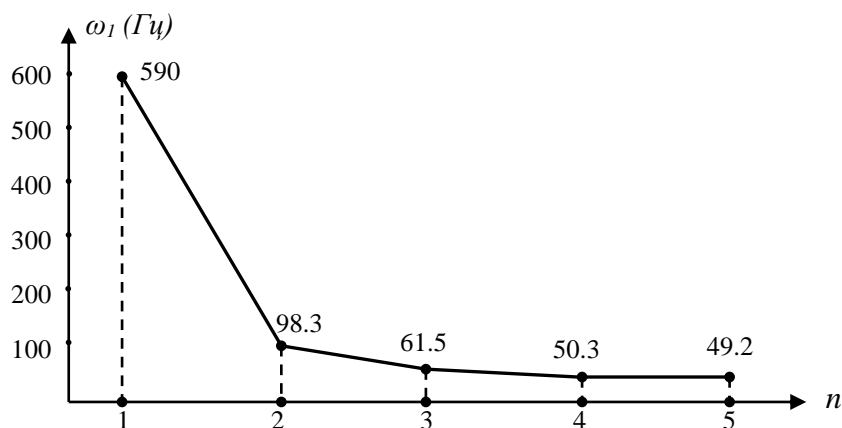


Рис. 3. График 1. Первая частота

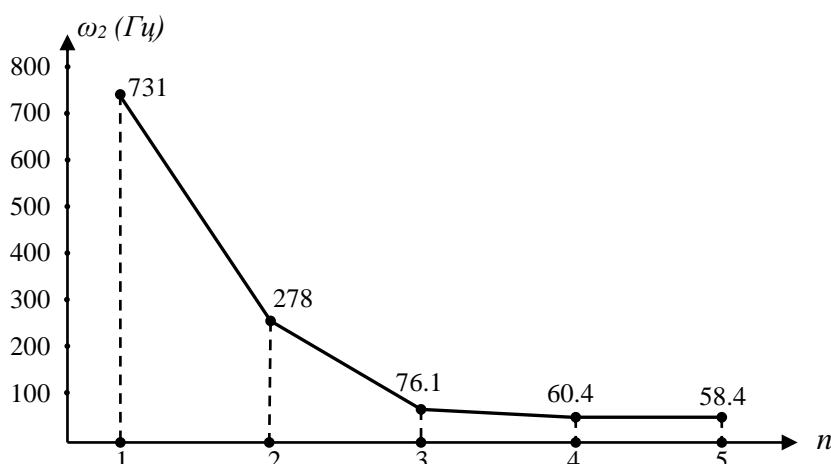


Рис.4. График 2. Вторая частота

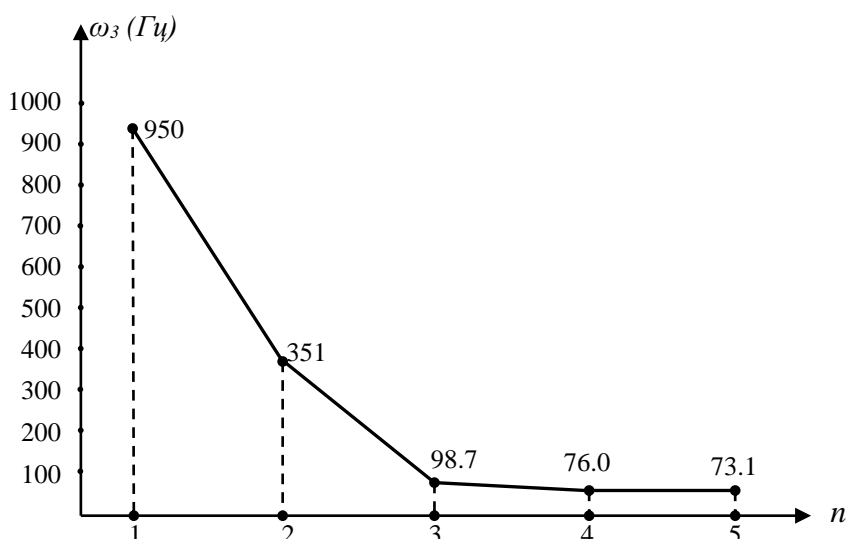


Рис. 5. График 3. Третья частота

Выводы. Анализируя полученные значения первых трех частот собственных колебаний тонкой волнистой оболочки с шарнирно-неподвижным опиранием по нижнему контуру вдоль образующей, можно отметить, что уже пятое приближение (36 членов ряда) с достаточной инженерной точностью позволяет определять численные значения низших частот.

Различие результатов между четвертым и пятым приближениями по первой частоте составляет 2,2 %, по второй — 3,4 %, по третьей — 4,0 %.

Полученные значения низших частот собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки в случае ее шарнирно-неподвижного опирания по нижнему контуру вдоль образующей подтверждают хорошую сходимость алгоритма.

Таким образом, с достаточной для инженерного расчета точностью можно считать, что первые три частоты собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки численно равны:

– первая частота — $\omega_1 = 49,2$ Гц;

– вторая частота — $\omega_2 = 58,4$ Гц;

– третья частота — $\omega_3 = 73,1$ Гц.

Сравнение полученных результатов расчета данной волнистой оболочки для двух вариантов ее закрепления — с жестко закрепленным нижним контуром оболочки и шарнирно-неподвижным опиранием оболочки по нижнему контуру вдоль образующей — показывает, что в случае с шарнирно-неподвижным закреплением оболочки ее низшие частоты собственных колебаний уменьшились на 10–16 % [9].

В обоих случаях основному тону собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки соответствуют две поперечные полуволны.

Библиографический список

1. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер ; 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1976. — 512 с.
2. Аксентян, К. Б. Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений / К. Б. Аксентян, В. К. Гордеев-Гавриков. — Ростов-на-Дону : Изд-во РГУ, 1979. — 271 с.
3. Аксентян, К. Б. Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний / К. Б. Аксентян, В. Д. Еремин // Расчет оболочек и пластин. — Ростов-на-Дону : Редакционно-издательский центр РИСИ, 1977. — С. 43–52.
4. Еремин, В. Д. Собственные колебания некруговой цилиндрической упругой волнистой оболочки открытого профиля / В. Д. Еремин // Строительство и архитектура-2015 : мат-ы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов-на-Дону : Редакционно-издательский центр РГСУ, 2015. — С. 99–101.
5. Еремин, В. Д. Влияние граничных условий на низшие частоты и формы собственных колебаний незамкнутой цилиндрической волнистой оболочки / В. Д. Еремин // Облегченные конструкции покрытий зданий. — Ростов-на-Дону : Редакционно-издательский центр РИСИ, 1984. — С. 45–58.
6. Еремин, В. Д. Определение частот и форм собственных колебаний оболочек неклассической формы / В. Д. Еремин // Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 94–100.
7. Еремин, В. Д. К расчету собственных колебаний тонкой волнистой оболочки открытого профиля / В. Д. Еремин // Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. — 2016. — Т. 60, № 1. — С. 64–71.
8. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — 5-е изд. — Москва ; Ленинград : Физматгиз, 1962. — 695 с.



9. Еремин, В. Д. Исследование численной сходимости алгоритма определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы / В. Д. Еремин // Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении. — 2016. — Т. 60, № 1. — С. 72–77.

Об авторе:

Еремин Виктор Дмитриевич, доцент кафедры «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент, eremin.vd@yandex.ru

About the Author:

Eremin, Viktor D., Associate professor, Department of Resistance of Materials, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Cand.Sci., Associate professor, eremin.vd@yandex.ru