

УДК 517. 977. 57

UDC 517. 977. 57

## УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ В ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

## CONSTRAINT SATISFACTION IN OPTI- MIZATION PROBLEM BASED ON THE PREDICTING MODEL

*Кашуба К. А., Трофименко В. Н.*

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация  
[trofimvn@mail.ru](mailto:trofimvn@mail.ru)

*Kashuba K. A., Trofimenko V. N.*

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[trofimvn@mail.ru](mailto:trofimvn@mail.ru)

Рассмотрена особенность оптимизационной задачи управления на основе прогнозирующей модели. Эта особенность заключается в значительных величинах управлений на начальном интервале оптимизации. Представлены результаты моделирования управления угловыми скоростями осесимметричного космического аппарата на основе алгоритма, использующего прогнозирующую модель с ограничениями на управление.

**Ключевые слова:** прогнозирующая модель, осесимметричный космический аппарат, угловые скорости, ограничения на управление.

The paper examines the peculiarity of control optimization problem based on the predicting model. This peculiarity lies in significant controls values on the initial optimization interval. The work presents the results of angular velocities control modeling for an axisymmetric spacecraft, based on the predicting model algorithm, with restrictions on a control.

**Keywords:** predicting model, axisymmetric spacecraft, angular velocities, restrictions on a control

**Введение.** Алгоритмы на основе прогнозирующей модели позволяют получить аналитические законы управления в замкнутой форме, в том числе, и для нелинейных объектов, например, уравнения в [1–3]. Недостатком полученных законов управления являются существенные значения управляющих воздействий на начальном этапе управления, что требует повышенных мощностей от управляющего органа. Целью данной работы является учет ограничений на управление в законе на основе прогнозирующей модели и сравнительный анализ законов управления без ограничений и с учетом ограничений.

**Основная часть.** Для обхода вычислительных трудностей решения задач оптимизации, включая задачи оптимального управления, а также оценивания состояния динамических объектов академиком А. А. Красовским был предложен полуопределенный функционал, который называется функционалом обобщенной работы [4].

Для динамического объекта, описываемого уравнением

$$\dot{x} = \phi(x, t) + u, \quad u \in R^m, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

оптимальное управление  $u_0$  определяется на основе минимизации функционала Красовского.

$$J = V(x(t_1), x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} Q(x, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (u^T k^{-1} u) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (u_0^T k^{-1} u_0) dt \quad (2)$$

где  $x$  — вектор состояния объекта,  $u$  — вектор оптимизируемых управляющих воздействий,  $u_0$  — вектор искомых (неизвестных) управлений,  $V(x(t_1), x(t_2))$ ,  $Q(x, t)$  — заданные положительно определенные дифференцируемые целевые функции,  $k = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m)$  — диагональная матрица заданных коэффициентов,  $T$  — символ транспонирования.

Введение в целевой функционал неизвестных управлений  $u_o$  в составе дополнительных интегральных ограничений

$$\int_{t_1}^{t_2} (u_o^T k^{-1} u_o) dt = C, \quad C = const$$

позволяет в процедуре оптимизации перейти от решения нелинейного управления Беллмана к решению линейного уравнения Ляпунова-Беллмана, что существенно облегчает оптимизацию [5]. Константу  $C$  можно трактовать как заданные обобщенные затраты на управление в некоторой оптимальной системе.

**Алгоритмы с прогнозирующей моделью.** В работах отечественных ученых были предложены алгоритмы оптимального управления, основанные на минимизации функционала Красовского и использующие прогноз движения модели [1, 6–9].

В соответствии с методом, предложенным в работах [1,7], оптимальное управление  $u_o$ , минимизирующее функционал (2), определяется из выражения

$$u_o(t) = -k \left[ \int_t^{t_2} (G^T(s,t) \dot{Q}_x) ds + G^T(t_2,t) \dot{V}_x \right]. \quad (3)$$

Фундаментальная матрица  $G(s,t)$  и векторы частных производных  $\dot{Q}_x$ ,  $\dot{V}_x$  соответствующих функций определяются на решениях свободного движения системы  $x(s)$  в ускоренном времени  $s$

$$\dot{x} = \phi(x,s), \quad x(s) \Big|_{s=t} = x(t), \quad s \in [t, t_2], \quad (4)$$

причем, фундаментальная матрица  $G(s,t)$  находится из решения уравнения

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial s} = F_x G(s,t), \quad G(s,t) \Big|_{s=t} = I, \quad (5)$$

в котором  $I$  — единичная матрица,  $F_x = \partial \phi / \partial x$  — матрица Якоби уравнения движения объекта (1), а  $s$  — параметр, имеющий смысл ускоренного (прогнозируемого) времени.

В работах [1–3, 7–10] представлены оптимизационные задачи на основе метода прогнозирующей модели. Синтез оптимального управления нелинейным объектом на основе прогнозирующей модели для ряда задач позволяет получить аналитические законы управления, например, в задаче управления угловыми скоростями осесимметричного космического аппарата (КА) [2].

**Синтез терминального управления угловыми скоростями осесимметричного КА.** Угловое движение осесимметричного КА описывается уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + A\omega_2\omega_3 &= u_1, & \omega_1(t) \Big|_{t=t_0} &= \omega_{10}, \\ \dot{\omega}_2 - A\omega_1\omega_3 &= u_2, & \omega_2(t) \Big|_{t=t_0} &= \omega_{20}, \\ \omega_3 &= u_3, & \omega_3(t) \Big|_{t=t_0} &= \omega_{30}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $A$  — приведенный момент инерции;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  — угловые скорости и управления как функции времени, составляющие векторы  $\omega$  и  $u$  соответственно.

Аналитический закон терминального управления угловыми скоростями на основе прогнозирующей модели представлен выражениями [2]:

$$u_1(t) = -k_1 \left\{ \omega_1(q_1 + q_2)(t_2 - t_1) - \frac{q_1 - q_2}{2\alpha} [\omega_1 \sin 2\gamma - \omega_2 (\cos 2\gamma - 1)] + \omega_1 \times \right. \\ \left. \times (m_1 + m_2) + (m_1 - m_2) (\omega_1 \cos 2\gamma + \omega_2 \sin 2\gamma) - 2m_1\omega_{1k} \cos \gamma + 2m_2\omega_{2k} \sin \gamma \right. \quad (7)$$

$$u_2(t) = -k_2 \left\{ \omega_2(q_1 + q_2)(t_2 - t_1) + \frac{q_1 - q_2}{2\alpha} [\omega_2 \sin 2\gamma - \omega_1 (\cos 2\gamma) - 1] + \omega_2 \times \right. \\ \left. \times (m_1 + m_2) + (m_1 - m_2) (\omega_1 \cos 2\gamma - \omega_2 \sin 2\gamma) - 2m_1\omega_{1k} \sin \gamma - 2m_2\omega_{2k} \cos \gamma \right\}, \quad (8)$$

$$u_3(t) = -k_3 \left\{ 2\omega_3 q_3 (t_2 - t_1) + \frac{q_1 - q_2}{2\alpha^2} [(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\sin 2\gamma - 2\gamma \cos 2\gamma) - 4\omega_1\omega_2 \times \right. \\ \left. \times (\cos 2\gamma + 2\gamma \sin 2\gamma - 1)] + 2m_3(\omega_3 - \omega_{3k}) + A(m_1 - m_2)(t - t_2) [(\omega_2^2 - \omega_1^2) \times \right. \\ \left. \times \sin 2\gamma + 2\omega_1\omega_2 \cos 2\gamma] + 2A(t - t_2) [m_1\omega_{1k} (\omega_1 \sin \gamma - \omega_2 \cos \gamma) + \right. \\ \left. + m_2\omega_{2k} (\omega_1 \cos \gamma - \omega_2 \sin \gamma)] \right\}, \quad (9)$$

**Моделирование терминального управления.** На рис. 1 представлены результаты моделирования на интервале времени [0–2,5 сек] для начальных  $\omega(0)=[2,5-1,7 \ 1,2]^T$  и терминальных  $\omega(2,5)=[1,0 \ 0,0-1,0]^T$  данных. Графики динамики угловых скоростей и управлений, полученные на основе выражений (7)– (9), представлены утолщенными линиями.

Полученные результаты, а также решения, представленные в работах [1, 2], показывают общую особенность синтезируемых управлений, заключающуюся в больших значениях управляющих воздействий на начальном участке оптимизации и в существенно меньших величинах (в разы) на дальнейшем интервале. Это требует больших мощностей от исполнительных устройств системы управления.

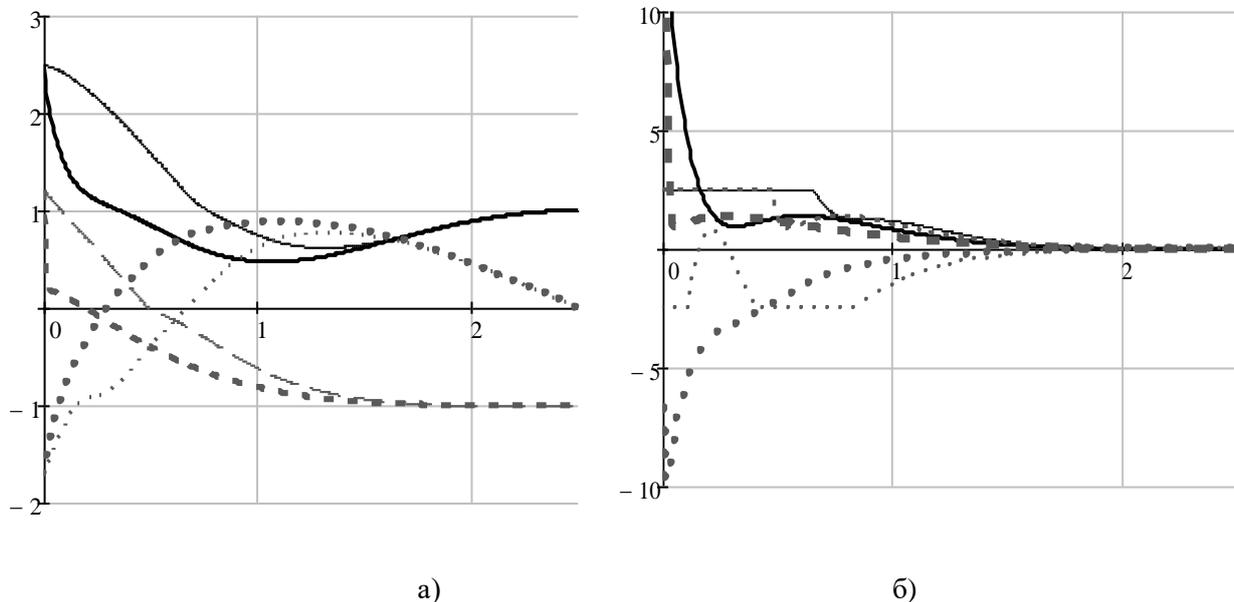


Рис. 1. Динамика угловых скоростей (а) и управлений (б) (утолщенные линии — без ограничений, тонкие линии — с ограничениями):  $\omega_1(t)$  (—),  $\omega_2(t)$  (.....),  $\omega_3(t)$  ( \_ \_ ), сек<sup>-1</sup>;  $u_1(t)$  (—),  $u_2(t)$  (.....),  $u_3(t)$  ( \_ \_ ), сек<sup>-2</sup>

На рис. 1 представлены результаты расчетов с ограничениями на управления (тонкие линиями). Ограничения на управления определялись как усредненные на интервале оптимизации значения управлений без ограничений.

Анализ результатов показывает следующее:

1. Общий интервал оптимизации при введении ограничений можно разбить на два участка — начальный интервал, который можно определить как квазиоптимальный, где действуют ограничения на управление и конечный оптимальный интервал, где управление реализуется без ограничений.

2. При введении ограничений уменьшилась требуемая мощность исполнительного органа.

3. Уменьшились угловые ускорения, что является положительным эффектом от ввода ограничений.

4. Уменьшились затраты на управления. Поканальные затраты на управления до ввода ограничений составили  $u=(4,6\ 3,7\ 8,9)$ , а после ввода ограничений —  $u_{огр}=(2,3\ 2,2\ 2,0)$ .

5. Уменьшилась точность достижения терминальных значений. Терминальные значения угловых скоростей до ввода ограничений составили  $\omega(2,5)=[0,9999999\ -4,1\cdot 10^{-5}\ -0,9999529]^T$ , а после ввода ограничений —  $\omega_{огр}(2,5)=[0,9999995\ -8,2\cdot 10^{-5}\ -0,9999056]^T$ .

**Заключение.** Метод прогнозирующей модели на основе минимизации функционала обобщенной работы показывает свою эффективность как при синтезе оптимальных законов управления, так и при синтезе законов управления с формированием ограничений на управления. Введение ограничений на управления позволяет уменьшить требования по мощности исполнительных устройств при незначительном ухудшении точностных показателей на конце интервала оптимизации. Компенсировать уменьшение точности можно увеличением интервала оптимизации.

#### Библиографический список

1. Таран, В. Н. Синтез оптимального управления градиентным методом на основе прогнозирующей модели / В. Н. Таран, В. А. Детистов // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 10. — С. 46–51.

2. Таран, В. Н. Синтез оптимального алгоритма угловой стабилизации методом прогнозирующей модели / В. Н. Таран, В. Н. Трофименко // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 5. — С. 82–85.

3. Trofimenko, V. N. Algorithm for air density estimation by measuring parameters of test body movement based on the criteria of the minimum of generalized work functional. Sixth International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics / V. N. Trofimenko, K. V. Trofimenko // SPIE Proceedings. - Volume: 3983. - 1999. - № 11. — P. 321-327.

4. Красовский, А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. / А. А. Красовский. — Москва : Наука, 1973. — 558 с.

5. Справочник по теории автоматического управления / А. Г. Александров [и др.]. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 712 с.

6. Шендрик, В. С. Синтез оптимального управления методом прогнозирующей модели / В. С. Шендрик. // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 224, № 3. — С. 561–562.

7. Буков, В. Н. Синтез управляющих сигналов с помощью прогнозирующей модели в адаптивной системе управления / В. Н. Буков // Проблемы управления и теории информации. — 1980. — Т. 9(5) . — С.329–337.

8. Кубинцев, Г. М. Итеративный синтез управления при помощи прогнозирующих устройств / Г. М. Кубинцев, К. Т. Цатурян // Автоматика и телемеханика. — 1981. — N 8. — С. 83–89.

9. Буков, В. Н. Оптимизация человеко-машинных систем на основе прогнозирования психофизиологического состояния оператора / В. Н. Буков // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 12. — С.124–137.



10. Трофименко, В. Н. Алгоритм оценивания параметров траектории летательного аппарата / В. Н. Трофименко С. В. Иванов, Н. Я. Половинчук // Двойные технологии. — 2014. — № 1 (66). — С. 30–33.

11. Тихонравов, М. К. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли / М. К. Тихонравов [и др.]. — Москва : Машиностроение. — 1967. — 296 с.