ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.87

Анализ оценок максимально внутренне устойчивых множеств при работе с обыкновенным взвешенным графом

В.Г. Кобак, Д.В. Глазков
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Аннотация
Исследованы методы эффективного поиска максимально внутренне устойчивых множеств в обычных графах. Рассмотрены точные методы поиска максимально внутренне устойчивого множества: метод Магу, различные методы поиска нижних оценок. Данные алгоритмы направлены либо на анализ структуры графов и выявление в них особых подструктур, обладающих свойством внутренней устойчивости, либо на прогнозирование чисел внутренней устойчивости и результатов, связанных с ними. Проведён вычислительный эксперимент с использованием программного средства на языке программирования C# на различных объёмах исходных данных. Результаты эксперимента демонстрируют эффективность и сравнимость оценок при различных условиях, сделаны выводы об их эффективности.

Ключевые слова: метод Магу, нижняя оценка, верхняя оценка, максимально внутренне устойчивое множество, хроматическое число, обыкновенный граф, обратный граф, вершина (узел), ребро (связь)

Для цитирования. Кобак В.Г., Глазков Д.В. Анализ оценок максимально внутренне устойчивых множеств при работе с обыкновенным взвешенным графом. *Молодой исследователь Дона.* 2024;9(3):28–31.

Analysis of Estimates of the Most Internally Stable Sets when Working with an Ordinary Weighted Graph

Valerii G. Kobak, **Dmitrii V. Glazkov**
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Abstract
The methods of effective search for the most internally stable sets in ordinary graphs are investigated. The paper considers the exact methods of searching for the most internally stable set: the Magu method, various methods of searching for upper and lower grades. These algorithms are aimed either at analyzing the structure of graphs and identifying special substructures in them that have the property of internal stability, or at predicting the numbers of internal stability and the results associated with them. A computational experiment was conducted using a software tool in the C# programming language on various volumes of source data. The results of the experiment are presented in tables, demonstrating the effectiveness and comparison of estimates under different conditions. The conclusions are drawn about their effectiveness.

Keywords: Magu method, lower bound, upper bound, maximally internally stable set, chromatic number, ordinary graph, inverse graph, vertex (node), edge (connection)

For citation. Kobak VG, Glazkov DV. Analysis of Estimates of the Most Internally Stable Sets when Working with an Ordinary Weighted Graph. *Young Researcher of Don.* 2024;9(3):28–31.

Введение. В области теории графов обыкновенные графы являются важным объектом исследования для анализа различных систем и структурных сетей. Обыкновенный граф, обозначаемый как *G*, представляет собой абстрактную модель, включающую в себя множество вершин, соединенных между собой рёбрами. Важно отметить, что рёбра в обыкновенном графе лишены направления и веса, что облегчает анализ разнообразных связей в системах.

Каждый обыкновенный граф представляет собой набор вершин (узлов) и рёбер (связей), соединяющих эти вершины. Формально каждое ребро в графе представляет собой упорядоченную пару вершин, между которыми оно установлено.

В данном исследовании особое внимание уделяется двум ключевым параметрам обыкновенного графа: максимальному устойчивому подмножеству и хроматическому числу. Эти параметры играют важную роль в анализе структурных и функциональных характеристик графов, а также находят практическое применение в информационных технологиях, транспортных сетях, социальных системах и др.

Максимальное устойчивое подмножество, далее обозначаемое как S, в графе определяется как наибольшее множество вершин, между которыми отсутствуют рёбра. Этот параметр широко используется для анализа связности и зависимостей в графах.

Хроматическое число графа, далее обозначаемое как $X(G)$), в свою очередь, представляет собой минимальное количество цветов, необходимых для правильной раскраски вершин графа таким образом, чтобы смежные вершины имели разные цвета. Этот параметр играет ключевую роль в задачах оптимизации и раскраски графов, а также в анализе различных типов взаимосвязей между элементами системы.

В данной работе проведен программный эксперимент по сравнению двух оценок максимально внутренне устойчивого числа обыкновенного графа для случаев с небольшим количеством вершин и использованием хроматических чисел дополнительного и обыкновенного графов.

Графом дополнительным для обыкновенного является такой граф, в котором каждое ребро изменено таким образом, что, если в исходном графе между двумя вершинами отсутствовала связь (обозначенная нулем в матрице смежности), то в графе обратного между этими вершинами устанавливается связь (представленная единицей в матрице смежности) и наоборот.

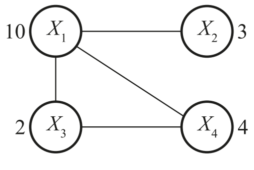
Задача поиска наибольшего независимого множества (ННМ) является NP-полной, означая, что её решение требует экспоненциального времени. Это было доказано Ричардом Карпом в 1972 году. В его работе «Сводимость комбинаторных задач» было показано, что задача нахождения наибольшего независимого множества является NP-полной. Этот результат выявляет важную связь между задачами оптимизации в графах. В частности, связь между наибольшим независимым множеством и хроматическим числом графа является важным аспектом комбинаторной оптимизации [1].

Таким образом, задачи нахождения наибольшего независимого множества и определения хроматического числа графа тесно связаны. Эта связь позволяет использовать результаты и методы, разработанные для одной из этих задач, для решения другой задачи. Это обстоятельство делает исследование и разработку эффективных алгоритмов для этих задач важной целью комбинаторной оптимизации.

На практике для решения данной задачи часто применяют различные эвристические алгоритмы, приближенные, а также точные методы. Одним из точных методов является метод Магу.

Основная часть. Метод Магу. Алгоритм Магу, предложенный Ф. Магу в 1967 году, применяется для определения внутренне устойчивых множеств (ВУМ) в графах. Он представляет собой эффективный метод для поиска максимального подмножества вершин в графе, такого, что все вершины в этом подмножестве не связаны друг с другом и любая другая вершина, не входящая в это подмножество, уже не может быть добавлена в него. Алгоритм Магу решает так называемую «задачу независимости» в графах.

Процесс работы алгоритма заключается в выписке всех недостающих элементов для каждой элементарной конъюнкции, полученной в ходе решения дизъюнктивно нормальной формы (ДНФ), рассчитанной из конъюнкции элементарных дизъюнкций согласно таблице смежности графа (рис. 1) [2].



	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	1	1	1
X_2	1	0		
X_3	1		0	1
X_4	1		1	0

$$(X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3)(X_1 \vee X_4)(X_2 \vee X_1)(X_3 \vee X_1)(X_3 \vee X_4)(X_4 \vee X_1)(X_4 \vee X_3) =$$
$$= (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3)(X_1 \vee X_4)(X_3 \vee X_4) = (X_1 \vee X_2X_3)(X_4 \vee X_1X_3) =$$
$$= X_1X_4 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3X_4 \vee X_1X_2X_3 = X_1X_4 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3X_4$$

	X_2X_3	X_2X_4	X_1
Вес ВУМ	5	7	10

Рис. 1. Работа метода Магу

В результате полученные множества вершин будут обладать свойством внутренней устойчивости. Этот метод является точным инструментом для анализа максимального устойчивого подмножества графа, что делает его важным и незаменимым компонентом исследований структурных и функциональных характеристик графов.

Помимо точного метода Магу, позволяющего находить такие подмножества, также можно использовать различные методы нижних оценок, основанные на знании хроматических чисел обыкновенного графа и его дополнениях. В данной работе представлены точные решения хроматического числа обыкновенного и обратного графа с применением алгоритма Магу [2].

Нижняя оценка. В исследованиях обыкновенных графов особенно важны нижние оценки хроматического числа, которые зависят от внутренней устойчивости. Пусть существует обыкновенный граф $G = (E, U)$, а $\alpha(G)$ обозначает число внутренней устойчивости. Тогда хроматическое число $X(G)$ не может быть меньше $p/(\alpha(G))$. Это позволяет более точно определить минимальное количество цветов, необходимых для правильной раскраски графа, исходя из его внутренней структуры [3].

Из вышесказанного можно сделать следующее заключение о числе максимальной устойчивости:

$$\alpha(G) \geq \frac{p}{X(G)}. \tag{1}$$

Вторая нижняя оценка заключается в отношении графа G и его дополнительного графа $\bar{G} = (E, \bar{U})$, где $X(\bar{G})$ представляет хроматическое число $\bar{G}$, число внутренней устойчивости $\alpha(G)$ удовлетворяет неравенству

$$\alpha(G) \geq \frac{p}{X(\bar{G})}. \tag{2}$$

Это неравенство, сформулированное Коффманом, подчеркивает важность внутренней устойчивости графа при определении его хроматического числа и влияние его на количество вершин, которые можно покрасить с использованием данного числа цветов. Его можно проиллюстрировать следующим образом: чем выше внутренняя устойчивость графа $\bar{G}$, тем меньше количество вершин $\bar{G}$, которые могут быть покрашены в один цвет, что, в свою очередь, увеличивает минимально необходимое количество цветов для корректной раскраски всего графа G. Понимание внутренней структуры графа становится поэтому неотъемлемой частью анализа его хроматических свойств и эффективного использования цветовой раскраски.

Таким образом, осознание тесной взаимосвязи между внутренней устойчивостью графа и его хроматическим числом не только открывает новые перспективы для изучения структур графов, но и обеспечивает более глубокое понимание применения цветовой раскраски в различных областях, таких как теория графов, комбинаторика и информационные технологии.

Ход работы. В данной работе был проведен программный эксперимент по сравнению двух оценок максимально внутренне устойчивого числа с использованием хроматических чисел обратного и обыкновенного графов с небольшим количеством вершин (здесь необходимо учитывать характеристики компьютера и параметры вычислительного эксперимента). Вот примерные характеристики, которые могут быть важными для описания такого эксперимента:

Характеристики компьютера:

– тип процессора: AMD Ryzen 5 4600H with Radeon Graphics 3.00 GHz;

– объем оперативной памяти: 16,0 ГБ;

– операционная система и ее версия: Windows 10 Домашняя, 22H2.

Характеристики вычислительного эксперимента:

– размер обрабатываемых графов: 7–12;

– способ представления графов в программе: матрица смежности;

– методика сравнения результатов: по точности оценки
относительно числа внутренней устойчивости графа.

Для сотни графов с 7 вершинами были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 1,05;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 1,03.

Для сотни графов с 8 вершинами были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 1,083;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 1,048.

Для сотни графов с 9 вершинами были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 1,204;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 1,138.

Для сотни графов с 10 вершинами были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 1,277;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 1,177.

Анализ собранной статистики позволяет сделать вывод, что оценка по методу Коффмана оказалась более точной, поскольку полученное значение ближе к фактической устойчивости.

Для сотни графов с 11 вершинами были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 1,27;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 1,26.

Для сотни графов с 12 вершинами также были получены следующие результаты:

– средний показатель МВУМ для исходного графа составил 2,8;

– средний показатель МВУМ для обратного графа составил 2,76.

Эти результаты подтверждают вывод о точности оценок, сделанный на основе предыдущего анализа.

Заключение. В данной работе был сделан анализ оценок максимально внутренне устойчивых множеств в контексте обыкновенного взвешенного графа. На основе проведённых исследований выявлены основные принципы и методы определения таких множеств, а также их важность для понимания структуры графа. Полученные результаты подчеркивают значимость анализа внутренне устойчивых множеств в рамках теории графов, а также определяют более эффективные методы оценок чисел внутренней устойчивости для исследований в этой области. В целом проведенное исследование способствует более глубокому пониманию особенностей обыкновенных и дополнительных графов.

Список литературы

1. Karp R.M. Reducibility Among Combinatorial Problems. In: Jünger M., et al. *Years of Integer Programming 1958-2008.* Springer, Berlin, Heidelberg; 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68279-0_8

2. Коффман А. *Введение в прикладную комбинаторику*. Москва: Наука. 1975. 180–199 с.

3. Верхняя и нижняя оценки для хроматического числа. Внутренне и внешне устойчивые множества вершин графа. URL: https://all4study.ru/matematika/verxnyaya-i-nizhnyaya-ocenki-dlya-xromaticheskogo-chisla-vnutrenne-i-vneshne-ustojchivye-mnozhestva-vershin-grafa.html (дата обращения: 10.01.2024).

Об авторах:

Валерий Григорьевич Кобак, доктор технических наук, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), valera33305@mail.ru

Глазков Дмитрий Владимирович, студент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), dimitriyglaz@gmail.com

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Valerii G. Kobak, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Departments of Computer Engineering and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), valera33305@mail.ru

Dmitrii V. Glazkov, Student of the Departments of Computer Engineering and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), dimitriyglaz@gmail.com

Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.