УДК 519.612.2

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СЛАУ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ

Д. А. Соломаха
Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Во многих задачах прикладной математики и физики возникают некорректные задачи. В этой статье рассматривается решение модельной задачи плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей Гильберта на основе метода регуляризации. В статье использован метод регуляризации по А. Н. Тихонову и повышение точности вычислений — переход к режиму двойной и многократной точности. Для оценки качества решения был выбран критерий, зависящий от погрешности решения и времени, за которое было найдено это решение. Алгоритм был реализован на языке программирования Python с использованием библиотек Nump и Mpmath. На основе численных решений плохо обусловленной СЛАУ были выявлены приемлемые способы решения СЛАУ.

Ключевые слова: плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений, матрица Гильберта, параметр регуляризации, повышение точности вычислений, численные расчеты.

REGULARIZATION OF ILL-CONDITIONED SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS TO IMPROVE ACCURACY AND STABILITY OF THE SOLUTION

D. A Solomakha
Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

In many problems of applied mathematics and physics, incorrect problems arise. This article discusses the solution of a model problem of an ill-conditioned system of linear algebraic equations (SLAQ) with a Hilbert matrix based on the regularization method. The article uses the method of regularization according to A. N. Tikhonov and increases the accuracy of calculations – the transition to the mode of double and multiple precision. To assess the quality of the solution, a criterion was chosen that depends on the error of the solution and the time for which this solution was found. The algorithm was implemented in the Python programming language using the Numpy and Mpmath libraries. On the basis of numerical solutions of ill-conditioned SLAQ, acceptable ways of solving SLAQ have been identified.

Keywords: ill-conditioned systems of linear algebraic equations, Hilbert matrices, regularization parameter, increasing the accuracy of calculations, numerical calculations.

Введение. Аппроксимация функций полиномами методом наименьших квадратов приводит к необходимости решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей [1], подобной матрице Гильберта H [2]. Матрица H размерности n является положительно определенной, симметричной, но при увеличении n погрешность решения СЛАУ становится недопустимо большой и/или процесс решения такой СЛАУ становится вычислительно неустойчивым [3]. Возникающие проблемы можно решать различными способами [4], в частности, методом регуляризации СЛАУ по А. Н. Тихонову [2], а также увеличением точности вычислений при переходе к двойной и многократной точности. Таким образом, представляется актуальным нахождение оптимальных способов решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей для уменьшения погрешности и повышения устойчивости решения. Это и явилось целью представленной работы.

Основная часть. При использовании метода регуляризации по А. Н. Тихонову [2] достаточно заменить матрицу системы A_n матрицей $A_n + a_n E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n, а a — параметр регуляризации, который выбирается, например, из условий минимизации нормы вектора невязки при сохранении устойчивости численного решения.

Двойная точность вычислений, как правило, поддерживается аппаратно, а многократная точность — программно. Поэтому для вычислений с четверной точностью был использован соответствующий программный комплекс.

Материалы и методы

Для проведения исследований, в частности, определения погрешности решений СЛАУ использовалась следующая модельная задача:

$$H_n x_n = \mathrm{f}_n \tag{1}$$

где

$$H_n = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \text{где } h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \tag{2}$$

$$x_n = \{x_i\}_{i=1}^{n}, \text{где } x_i = i, i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

где H_n — матрица Гильберта (2); x_n — вектор решений, который для проводимых исследований задается и, следовательно, предполагается известным (3).

Нетрудно видеть, что вектор правых частей в этих условиях определяется как:

$$\mathrm{f}_n = \{f_i\}_{i=1}^{n}, \text{где } f_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j \ , i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Определим вектор погрешности решения (4). $\Delta x = x' - x$, где вектор x' — численное решение СЛАУ; x — вектор «точного» решения, определяемого по формуле (3).

Тогда относительную погрешность решения δx будем вычислять по формуле:

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \text{где } \|\Delta x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Чтобы повысить устойчивость решения и уменьшить относительную погрешность δx, будем использовать метод регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Метод заключается в минимизации сглаживающего функционала, в котором регуляризирующий параметр a находится из условия:

$$M_n(x_n, H_n, f_n) \equiv \|H_n x_n - f_n\|^2 + a_n\|x_n\|^2 \ \to min \tag{6}$$

$$(H_n + a_n E)x_n = f_n, \tag{7}$$

где E — единичная матрица.

Алгоритм сводится к нахождению параметра a из условия минимума норм вектора невязки для СЛАУ (6). На языке программирования Python с использованием библиотеки Numpy и Mpmath была составлена программа, которая наряду с решением СЛАУ с применением одинарной, двойной и четверной точности при расчетах, находит относительную погрешность решения. Для решения СЛАУ применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова [2] с одинарной и двойной точностью при расчетах.

Результаты исследования. Была рассмотрена следующая модельная задача СЛАУ вида $H_n x_n = f_n$, где вектор правых частей $\mathrm{f}_n = \{f_i\}^n$. $f_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j \ , i = \overline{1,n}$ выбран таким образом, что компоненты вектора неизвестных являются целыми числами, например $x_i = i, i = 1, 2, \dots, N$, где $N = 1, 2, \dots, 256$.

Для нахождения относительной погрешности δx_n используется формула (5) для СЛАУ с матрицей Гильберта $H_n x_n = f_n$, где H_n — матрица Гильберта, определяемая по формуле (2), с применением одинарной, двойной и четверной точности.

Численные результаты решения модельных задач и параметр регуляризации указаны в таблицах 1, 2. В таблице 2 присутствуют значения относительной погрешности, превышающие 1 (т. е. превышающие 100 %). Такие значения относительной погрешности неудовлетворительны, в таблице 2 эти значения выделены серым цветом. Для построения графиков использовались библиотеки Matplotlib и Seaborn. Также вводится критерий качества — $\frac{1}{\delta x * time}$, где для вычисления δx используется формула (5). *Time* — это время нахождения решения модельной задачи. Критерий качества определяется для результатов численного решения СЛАУ.

Таблица 1

Параметр регуляризации

n	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
a для одинарной точности	1e-16	1e-16	1e-16	1e-16	1e-16	1e-16	1e-17	1e-17
a для двойной точности	1e-17	1e-17	1e-17	1e-17	1e-17	1e-17	1e-18	1e-19

Таблица 2

Относительная погрешность

n	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
Одинарная точность	2,0142e-06	0,0001	0,1656	11,4429	112,945	77,766	226,3851	149,9377
Одинарная точность регуляризованная	7,7927e-07	7,0189e-05	0,1356	11,4770	124,2563	44,5867	61,4354	36,1615
Двойная точность	8,4339e-15	2,7387e-13	2,9664e-10	0,0008	21,6095	42,8961	54,0478	889,097
Двойная точность регуляризованная	8,4339e-15	2,7387e-13	2,8175e-10	0,0007	15,9696	44,0354	55,1881	889,097
Четверная точность	1,9857e-8	1,106e-7	3,9208e-5	1,2319	4,2822	16,1981	98,84	276,7923

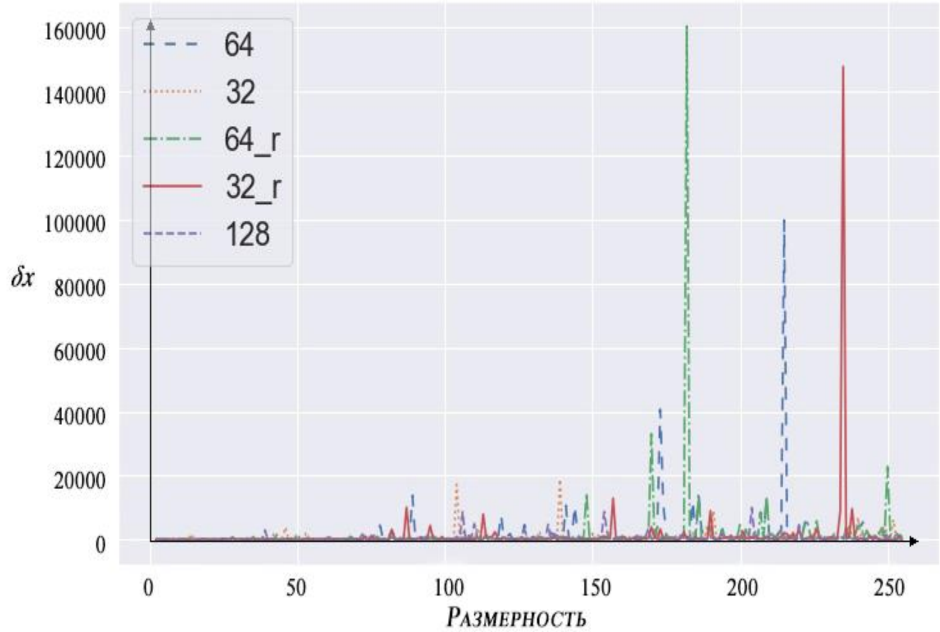

Рис. 1. График зависимости относительной погрешности от размерности СЛАУ с матрицей Гильберта. Обозначения на графике: 32_r — алгоритм одинарной точности с использованием регуляризации; 64_r — алгоритм двойной точности с использованием регуляризации; 32 — алгоритм одинарной точности; 64 — алгоритм двойной точности; 128 — алгоритм четверной точности

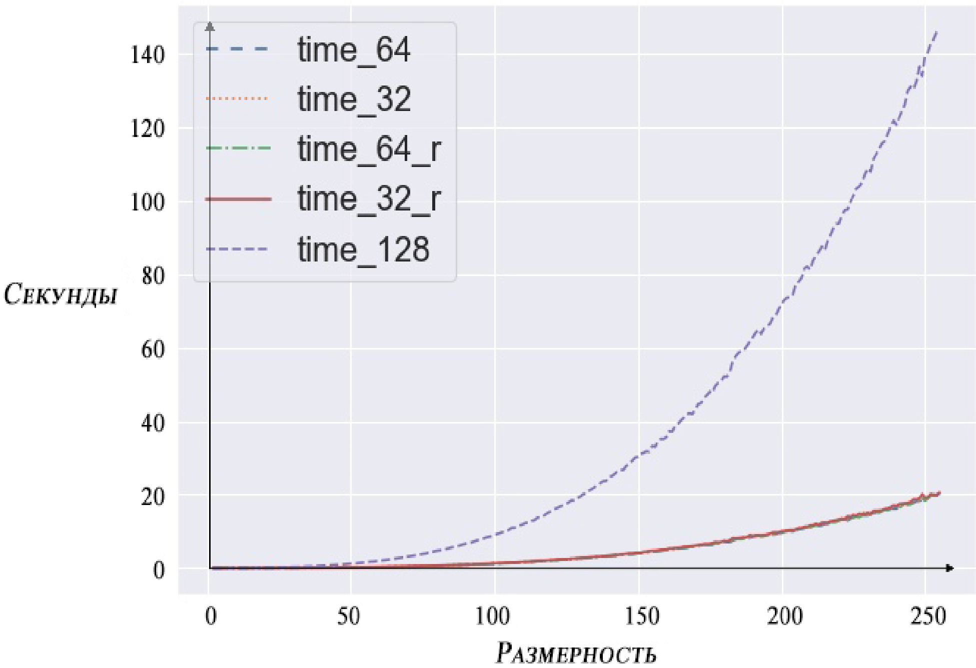

Рис. 2. График зависимости времени нахождения решения СЛАУ от её размерности. Обозначения на графике: 32_r — время решения с использованием алгоритма одинарной точности с регуляризацией; 64_r — время решения с использованием алгоритма двойной точности с регуляризацией; 32 — время решения с использованием алгоритма одинарной точности; 64 — время решения с использованием алгоритма двойной точности; 128 — время решения с использованием алгоритма четверной точности

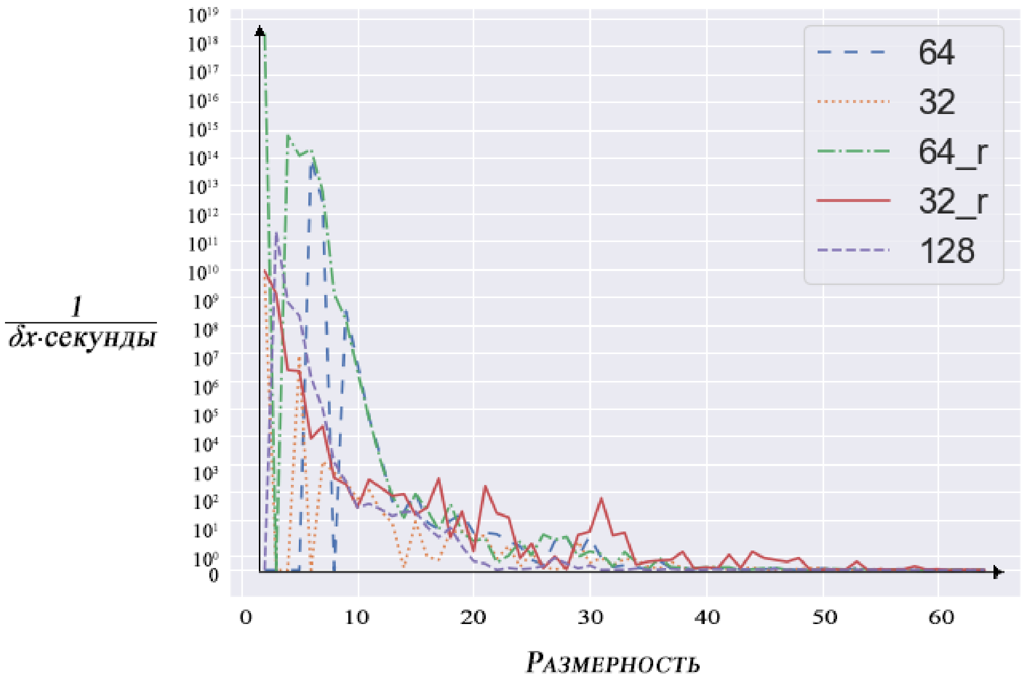

Рис. 3. График зависимости критерия качества исследуемых алгоритмов решения СЛАУ от её размерности. Обозначения на графике: 32_r — алгоритм одинарной точности с использованием регуляризации; 64_r — алгоритм двойной точности с использованием регуляризации; 32 — алгоритм одинарной точности; 64 — алгоритм двойной точности; 128 — алгоритм четверной точности

Хорошо видно (рис. 1), что при увеличении размерности при решении СЛАУ с матрицей Гильберта появляются выбросы и увеличивается относительная погрешность для всех представленных методов решения (таблица 2). Метод решения с четверной точностью имеет самую низкую относительную погрешность. Решение регуляризованных СЛАУ с помощью параметра a (таблица 1) одинарной и двойной точности в основном имеют более низкую относительную погрешность, в отличие от своих не регуляризованных аналогов. С повышением размерности системы, увеличивается время нахождения решения СЛАУ (рис. 2). Метод решения СЛАУ в режиме 128-битной точности реализуется медленнее по отношению режиму однократной и двойной точности, что связано с его программной реализацией. При решении с помощью регуляризации по А. Н. Тихонову в комбинации с режимом двойной точности значение критерия качества максимально (рис. 3), при увеличении размерности СЛАУ значение критерия качества для всех методов решения устремляется к нулю.

Обсуждение и заключения. Для уменьшения относительной погрешности и повышения устойчивости решения при решении СЛАУ с матрицей Гильберта следует использовать метод регуляризации по А. Н. Тихонову в комбинации с режимом двойной или многократной точности вычислений. Однако проблема решения СЛАУ с матрицами Гильберта H_n, $n>16$ требует дальнейшего исследования.

Библиографический список

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Решения задач и упражнения / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков. — 2-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2016. — 355 с.

2. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — Москва : Наука, 1979. — 283 с.

3. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений / С. И. Кабанихин. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.

4. Тыртышников, Е. Е. Методы численного анализа : учеб. пособие для студентов вузов / Е. Е. Тыртышников. — Москва : Издательский центр «Академия», 2007. — 320 с.

5. Сухинов, А. И. Решение задач вычислительной математики на ЭВМ. Учебное пособие / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко. — Ростов-на-Дону : ДГТУ-Принт, 2019. — 120 с.

Об авторах:

Соломаха Денис Анатольевич, студент кафедры «Математика и информатика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), solomakha.05@yandex.ru

About the Author:

Solomakha, Denis A., Student, Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1 Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344003, RF), solomakha.05@yandex.ru