

УДК 624.04

UDC 624.04

**РАСЧЕТ ДЕРЕВЯННОЙ БАЛКИ  
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С  
УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ****CREEP CALCULATION OF  
RECTANGULAR SECTION WOOD BEAM***Чепурненко А. С., Ульянская В. В.*

Донской государственный технический  
университет, Ростов-на-Дону, Российская  
Федерация

[anton\\_chepurnenk@mail.ru](mailto:anton_chepurnenk@mail.ru)  
[hallovera190@gmail.com](mailto:hallovera190@gmail.com)

В статье приводится вывод разрешающих уравнений для расчета деревянной балки с учетом ползучести. Приведен пример расчета шарнирно-опертой по концам балки прямоугольного поперечного сечения, нагруженной равномерно-распределенной нагрузкой. Величина прогиба найдена по методу конечных разностей. Разработана программа для расчета в пакете MATLAB с возможностью изменения исходных данных и выводом графика зависимости перемещений от времени. Приведено сравнение максимальной величины прогиба с аналитическим решением. Установлено, что в процессе ползучести напряжения остаются постоянными.

**Ключевые слова:** ползучесть, метод конечных разностей, уравнение Максвелла-Томпсона, деревянная балка.

**Введение.** Древесина является нелинейным материалом при действии как кратковременных, так и длительных нагрузок, и может быть исследована по времени в двух направлениях: длительной прочности и ползучести. Большинство исследований посвящено первому направлению, в то время как в Еврокодах определение деформаций ползучести является обязательным [1,2]. В современной литературе приводятся некоторые частные задачи расчета с учетом ползучести деревянных конструкций. Так, расчет сжатых деревянных стоек на устойчивость при ползучести рассматривается в работе [3]. В монографии Н. Х. Арутюняна [4] приводятся методы расчета на ползучесть железобетонных балок с возможностью применения к другим материалам, в том числе и к дереву. Однако теория Н. Х. Арутюняна связана с решением интегральных уравнений, что зачастую сопряжено с математическими трудностями. В настоящей статье приводится относительно простой метод расчета деревянных балок с учетом ползучести. При этом закон ползучести может быть произвольным: как линейным, так и нелинейным.

**Вывод разрешающих уравнений.** Схема деревянной балки прямоугольного сечения с размерами  $b \times h$  приведена на рис. 1.

*Chepurnenko A. S., Ulianskaya V. V.*

Don State Technical University, Rostov-on-Don,  
Russian Federation

[anton\\_chepurnenk@mail.ru](mailto:anton_chepurnenk@mail.ru)  
[hallovera190@gmail.com](mailto:hallovera190@gmail.com)

The article provides the derivation of the resolving equations for creep calculation of the wood beam. An example of hinged on edges and loaded with a uniformly distributed load rectangular transverse section beam is presented. The deflection has been found by finite differences method. The program has been developed in MATLAB environment with the opportunity of initial data change and derivation of dependency graph of displacement on time. The comparison of deflection maximum with the analytical solution is given. It has been found that stresses remain constant during creep process.

**Key-words:** creep, finite differences method, Maxwell-Thompson equation, wood beam.

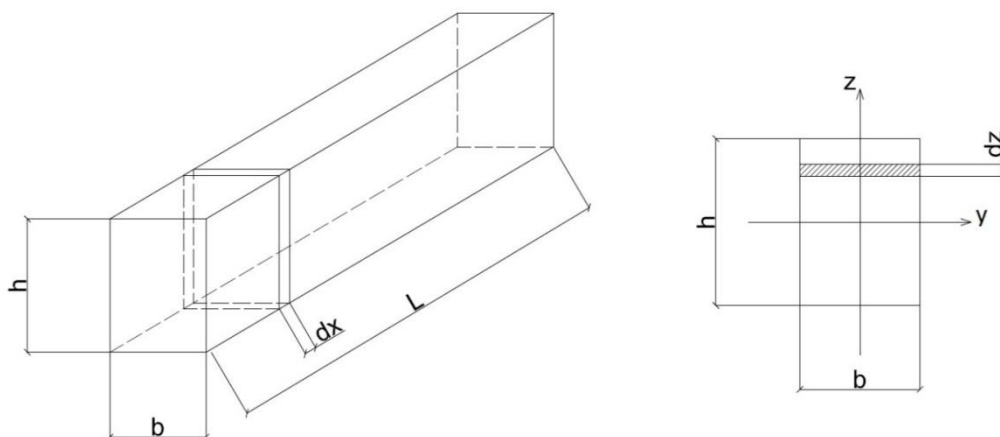


Рис. 1. Деревянная балка прямоугольного сечения

Полная деформация в произвольный момент времени определяется как сумма упругой деформации и деформации ползучести  $\varepsilon^*$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^* \quad (1)$$

Из гипотезы плоских сечений полная деформация определяется следующим образом:

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Подставим это выражение в (1), предварительно выразив напряжение  $\sigma$  через деформации:

$$\sigma = E \left( -z \frac{d^2 w}{dx^2} - \varepsilon^* \right) \quad (2)$$

Изгибающий момент связан с напряжением интегральным соотношением:

$$M = - \int_A \sigma z dA \quad (3)$$

Подставим (2) в (3):

$$M = - \int_A E \left( - \frac{d^2 w}{dx^2} - \varepsilon^* \right) z dA;$$

Раскрыв скобки, получим:

$$M = E \int_A z^2 dA \frac{d^2 w}{dx^2} + E \int_A \varepsilon^* z dA.$$

Введем обозначение  $M^* = E \int_A \varepsilon^* z dA$ . Величина  $\int_A z^2 dA$  представляет осевой момент инерции  $I_y = bh^3 / 12$ . Элемент площади  $dA$  можно заменить произведением  $b \cdot dz$ , тогда получим:

$$M^* = Eb \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* z dz \quad (4)$$

Окончательно разрешающее уравнение принимает вид:

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} + M^*.$$

**Методика расчета.** Интеграл (4) вычисляется численно по формуле трапеций:

$$A = \Delta z \left( \frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right)$$

где  $\Delta z$  — шаг интегрирования;  $y_0$  и  $y_n$  — начальное и конечное значения функции;  $y_i$  — промежуточные значения функции.

Величина прогиба была найдена методом конечных разностей. Для этого балка длиной  $l$  была разбита на определенное число интервалов  $n$  по длине величиной  $\Delta x$ . Вторая производная в  $i$ -ом узле определяется по формуле:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[A] \cdot [w] = [B], \quad (5)$$

где  $[A]$  — матрица коэффициентов при  $w_i$  размерностью  $(n+1; n+1)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $a_i = \frac{1}{\Delta x^2}$ ;  $b_i = \frac{-2}{\Delta x^2}$ ;  $c_i = \frac{1}{\Delta x^2}$ .

$[w]$  — вектор неизвестных узловых перемещений;  $[w] = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n+1}]$ ;  $[B]$  — вектор свободных членов

$$[B] = [0, f_1, f_2, f_3, \dots, 0],$$

где  $f_i = \frac{M_i}{EI}$ ,  $M_i = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$ ,  $(0 \leq x \leq l)$ .

Перемещения найдем, выразив их из формулы (5):

$$[w] = [A]^{-1} \cdot [B].$$

В качестве закона связи деформаций ползучести и напряжений будем использовать уравнение Максвелла-Томпсона [5]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} En + H\varepsilon = \sigma + n \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

где  $H$  — длительный модуль деформации ( $H = 10^4$  МПа),  $n$  — время релаксации ( $n = 18$  сут),  $E$  — мгновенный модуль деформации ( $E = 1,48 \cdot 10^4$  МПа).

Подставив в закон ползучести вместо  $\varepsilon$  выражение (1), получим:

$$\left( \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \right) En + \frac{H}{E} \sigma + H\varepsilon^* = \sigma + n \frac{\partial \sigma}{\partial t};$$

$$n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + En \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{H}{E} \sigma + H\varepsilon^* = \sigma + n \frac{\partial \sigma}{\partial t};$$

$$En \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) - H\varepsilon^*;$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left[ \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) - H\varepsilon^* \right];$$

Для вычисления деформаций ползучести вводится равномерная сетка по времени. Величина  $\varepsilon^*$  в момент времени  $t + \Delta t$  вычисляется на основе метода Эйлера [6]:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t.$$

Аналогичный подход для решения задач ползучести применяется в работах [7–10].

**Результаты и обсуждение.** Расчет был выполнен в программном комплексе MATLAB. Полученный график зависимости максимального прогиба от времени приведен на рис. 2:

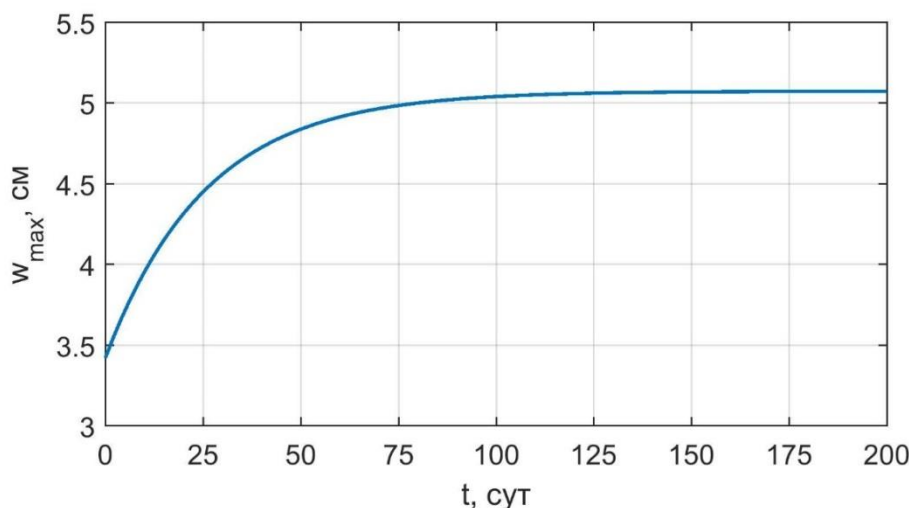


Рис. 2. Зависимость максимального прогиба от времени

Из представленного графика видно, что деформации резко возрастают в начальный период времени, а затем приходят к конечному значению.

Формула для определения максимального прогиба для шарнирно-опертой балки при действии равномерно-распределенной нагрузки выглядит следующим образом:

$$w_{max} = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (6)$$

Для определения прогиба в конце процесса ползучести достаточно заменить мгновенный модуль упругости  $E$  на длительный  $H$ .

При подстановке заданных размеров балки получим:

$$w_{max} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6^4}{384 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot 0,2^3 / 12} = 0,0506 \text{ м.}$$

На графике значение  $w_{max}$  совпадает с вычисленным по формуле (6).

Отметим также, что при выбранном законе ползучести напряжения во времени не меняются.

### Библиографический список

1. Ягнюк, Б. Н. Теоретические основы проектирования деревянных конструкций по нормам европейского союза — Еврокоду 5 / Б. Н. Ягнюк. — Москва-Берлин: Директ-Медиа, 2015. — 140с.
2. BS EN 1995-1-1:2004+A2:2014/ Еврокод 5. Проектирование деревянных конструкций.
3. Вареник, К. А. Расчет центрально-сжатый деревянных элементов с учетом ползучести: дис. ... канд. тех. Наук / К. А. Вареник. — Великий Новгород, 2015. — 167 с.
4. Арутюнян, Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н. Х. Арутюнян. — 1952. — 324 с.

5. Клименко, Е. С. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учётом физической нелинейности материала: дис. ... канд. тех. наук / Е. С. Клименко. — Ростов-на-Дону, 2011. — 112 с.
6. Турчак, Л. И. Основы численных методов. / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — Москва : Физматлит, 2003. — 304 с.
7. Аваков, А. А. Напряженно-деформированное состояние железобетонной арки с учетом нелинейной ползучести бетона / А. А. Аваков, А. С. Чепурненко, С. Б. Языев // Научно-технический вестник Поволжья. — 2015. — № 1. — С. 27–30.
8. Юхнов, И. В. Продольный изгиб гибкой железобетонной стойки при нелинейной ползучести [электронный ресурс] / Современные проблемы науки и образования // И. В. Юхнов [и др.]. — 2014. — № 5. — Режим доступа : <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=14705>.
9. Чепурненко, А. С. Расчет внецентренно сжатого железобетонного стержня на ползучесть при различных законах деформирования / А. С. Чепурненко [и др.] // Научное обозрение. — 2014. — № 8. — С. 935–940.
10. Никора, Н. И. Устойчивость полимерного стержня при ползучести с учетом дискретного спектра времен релаксации полимера / Н. И. Никора [и др.] // Научное обозрение. — 2016. — № 4. — С. 40–43.