УДК 621.9.048.6

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ПРОДОЛЬНО-КРУТИЛЬНОГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ВОЛНОВОДА

***Кудряшев С. Б.***
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
skudryshev@yandex.ru

Рассматривается решение задачи аналитического определения коэффициентов жесткости при кручении продольно-крутильных ультразвуковых волноводов, используемых в процессе электроакустического нанесения износостойких покрытий. Определение коэффициентов жесткости для продольно-крутильных каналов распространения волн позволяет решить проблему анализа и синтеза такого типа волноводов.

**Ключевые слова:** продольно-крутильный волновод, ультразвуковые колебания, коэффициенты жесткости, трансформация ультразвуковых колебаний.

UDC 621.9.048.6

# SOLUTION TO THE PROBLEM OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF LONGITUDINAL-TORSION ULTRASONIC WAVEGUIDE

***Kudryashev S. B.***
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
skudryshev@yandex.ru

The article is devoted to the solution to the problem of analytical determination of stiffness coefficients for torsion of longitudinal-torsion ultrasonic waveguides used for electroacoustic application of wear-resistant coatings. The analytical determination of the stiffness coefficients of this type of waveguide allows solving the problems of analysis and synthesis of naturally twisted longitudinally twisting waveguides.

**Keywords:** longitudinal-torsion waveguide, ultrasonic vibrations, stiffness coefficients, transformation of ultrasonic vibrations.

**Введение.** Рассмотрим решение задач анализа и синтеза продольно-крутильного ультразвукового волновода. При этом будем исходить из основ теории динамики трансформации ультразвуковых колебаний [1]. Чтобы аналитически определить коэффициенты жесткости продольно-крутильного ультразвукового волновода, рассмотрим кручение стержня, имеющего закрученную форму. Жесткость такого типа стержня при кручении определяется по формуле [2]

$$C = 2G\iint_{\Omega} U(r,\phi) r dr d\phi, \qquad (1)$$

где Ω — площадь сечения волновода.

**Основная часть.** При определении функции напряжения $U(r,\varphi)$ исходим из того, что она удовлетворяет уравнению (2) в области сечения волновода и обращается в нуль на его контуре.

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = -2. \qquad (2)$$

Симметрия области поперечного сечения волновода позволяет рассматривать одну четверть его сечения (рис. 1).

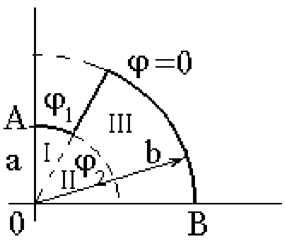


Рис. 1. Четверть поперечного сечения волновода

При этом нормальные производные функции $U(r,\varphi)$ на линии OA и OB приравняем к нулю.

Рассмотрим полученную область и разделим ее на сектора I, II и III. Допустим, что в этих секторах функция $U(r,\varphi)$ равна $U_1(r,\varphi)$, $U_2(r,\varphi)$ и $U_3(r,\varphi)$ соответственно.

Введем новые переменные $t$ и $r$:

$$t = \ln\frac{b}{a}, \quad r = a\cdot e^{t}. \tag{3}$$

Жесткость при кручении будет определяться по формуле (4):

$$c = 4\cdot n\cdot G\iint_{\Omega^*}^{0} U(t,\phi)\cdot a^2\cdot e^{2t}dt\cdot d\phi, \tag{4}$$

где $\Omega^*$ — площадь четверти сечения, $n$ — количество выточек волновода.

Представим функцию $U_i(r,\varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ в виде:

$$U_i = \left[r(t),\phi\right] = -\frac{a^2\cdot e^{2t}}{2} + \Phi_i(t,\phi). \tag{5}$$

Для определения функции $\Phi_i(t,\varphi)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} = 0 \tag{6}$$

и условия

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}\right)_{\phi=\phi_1} = \Phi_1(0,\phi) - \dfrac{a^2}{2} = \left(\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \phi}\right)_{\phi=-\phi_2} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial \Phi_3}{\partial \phi}\right)_{\phi=-\phi_2} = \Phi_3(t,0) - \dfrac{a^2\cdot e^{2t}}{2} = \Phi_3(t_1,\phi) - \dfrac{b^2}{2} = 0 \\ \Phi_1(t,0) = \Phi_2(t,0);\ \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}\right)_{\phi=0} = \left(\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \phi}\right)_{\phi=0} \\ \Phi_2(0,\phi) = \Phi_3(0,\phi);\ \left(\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\dfrac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_{t=0}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\phi_1 = \dfrac{\pi}{2\cdot\alpha}$; $\phi_2 = \dfrac{\pi}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)$; $\alpha$ — постоянное число, характеризующее ширину выточки.

Результаты вычислений позволяют утверждать, что жесткость при кручении круглого волновода с продольными винтовыми пазами определяется по формуле (8):

$$c = G\cdot a^4\cdot k\left(\frac{b}{a}\right), \tag{8}$$

где:

$$\begin{gathered} K\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{n\cdot\phi_2}{2}\cdot\left(\frac{b^4}{a^4}-1\right) - \frac{n\cdot\phi_2}{2\cdot t_1}\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)^2 + \\ 4\cdot n\cdot[\frac{\chi}{\phi_2\cdot a^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\lambda_k\cdot\left(4+\lambda_k^2\right)}\cdot\left(1+cth\left(\lambda_k\cdot t_1\right) - \frac{e^{2t_1}}{sh\left(\lambda_k\cdot t_1\right)}\right) - \\ -\frac{4}{t_1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{th\left(\beta_k\cdot\phi_2\right)}{\beta_k\cdot\left(4+\beta_k^2\right)^2}\cdot\left[1+(-1)^{k+1}\cdot e^{2t_1}\right]^2 - \\ -\frac{1}{\pi\cdot a^2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{X(z)\cdot\left(th(z\cdot\phi_1)+th(z\cdot\phi_2)\right)}{z\cdot\left(4+z^2\right)}\cdot dz]. \end{gathered} \tag{9}$$

Приведенное решение задачи о кручении стало основой для разработки алгоритма и программы аналитического определения жесткости при кручении волновода с естественно закрученным сечением.

Для волновода с поперечным сечением (см. рис. 1) площадь определяется по формуле [3]:

$$\Omega = 4 \cdot \left[ \pi \cdot a^2 \cdot \frac{\phi_1}{2\pi} + \pi \cdot b^2 \cdot \frac{\phi_2}{2\pi} \right] = 2 \cdot a^2 \cdot \phi_1 + 2 \cdot b^2 \cdot \phi_2 . \tag{10}$$

Момент инерции сечения:

$$J_\Omega = \int_\Omega \overline{R}^2 d\Omega = 4\int_0^b r^2 dr \cdot \int_0^{\phi_2} d\phi + + 4\int_0^a r^2 dr \cdot \int_0^{\phi_1} d\phi = b^4 \cdot \phi_2 + a^4 \cdot \phi_1 . \tag{11}$$

Из формул (3) и (4) получаем:

$$2 \cdot U_i + \overline{R}^2 = 2 \cdot \Phi_i \left( t, \phi \right). \tag{12}$$

Следовательно,

$$J_r^0 - T_r^0 = 4 \cdot \int_{\Omega/4} [2 \cdot \Phi_i \left( t, \phi \right)]^2 \cdot a^2 \cdot e^{2t} \cdot dt d\phi . \tag{13}$$

Рассмотрев каждую область поперечного сечения и выполнив необходимые преобразования, получим:

$$\begin{gathered} J_r^0 - T_r^0 = 16 \cdot a \cdot [\int_0^\infty dt \int_0^{\phi_1} \Phi_1^2 \left( -t, \phi \right) \cdot e^{-2t} d\phi + \int_0^\infty dt \int_0^{\phi_2} \Phi_2^2 \left( -t, -\phi \right) \cdot e^{-2t} d\phi + \\ + \int_0^{t_1} dt \int_0^{\phi_2} \Phi^2 \left( t, -\phi \right) \cdot e^{2t} d\phi]. \end{gathered} \tag{14}$$

Расчет производится по квадратурной формуле Гаусса для 32 узлов и весов [4].

**Заключение.** Чтобы определить коэффициенты жесткости, следует в формулу для их вычисления подставить разность $J_r^0 - T_r^0$, рассчитанную по (14).

Реализация практической задачи определения коэффициентов жесткости аналитическим методом позволяет решить задачу анализа и синтеза естественно закрученных продольно-крутильных волноводов.

**Библиографический список**

1. Минаков, В. С. К вопросу динамики продольно-крутильных волноводов / В. С. Минаков, Г. Г. Щепкин, Е. И. Бабинцев // Известия СКНЦВШ. — 1987. — № 6 С. 71–76. — (Технические науки).

2. Арутюнян, Н. Х. Кручение упругих тел / Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. — Москва : Физматгиз, 1963. — 688 с.

3. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю. В. Прохорова. — Москва : Советская Энциклопедия, 1988. — 847 с.

4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва : Наука, 1979. — 711 с.