

УДК 624.04

UDC 624.04

РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ СРЕДНЕГО СЛОЯ

*А. С. Чепурненко, В. С. Чепурненко,
А. А. Савченко*

Донской государственный технический
университет, Ростов-на-Дону, Российская
Федерация

anton_chepurnenk@mail.ru

CALCULATION OF A THREE-LAYER BEAM TAKING INTO ACCOUNT THE CREEP OF THE MIDDLE LAYER

*A. S. Chepurnenko, V. S. Chepurnenko,
A. A. Savchenko*

Don State Technical University, Rostov-on-Don,
Russian Federation

anton_chepurnenk@mail.ru

Рассматривается методика расчета трехслойной балки с легким заполнителем с учетом ползучести среднего слоя. Приведен пример расчета для шарнирно опертой по концам балки под действием равномерно распределенной нагрузки. В качестве закона ползучести используется линейное уравнение Максвелла-Томпсона.

Ключевые слова: трехслойная балка с легким заполнителем, пенопласты, метод конечных разностей, ползучесть, уравнение Максвелла-Томпсона

The article deals with the technique of calculation of a three-layer beam with a light core taking into account the creep of the middle layer. It provides the example of calculation for a simply supported at the ends beam under uniformly distributed load. As creep law, the authors use Maxwell-Thompson linear equation.

Keywords: three-layer beam with light filler, foams, finite difference method, creep, Maxwell-Thompson equation.

Введение. Изделия, в состав которых входят полимеры, в большей степени, чем многие другие строительные материалы подвержены ползучести. Поскольку средний слой трехслойных панелей часто изготавливается из пенопластов, указанное свойство необходимо учитывать при проектировании. Учет ползучести сопряжен с решением сложных систем интегро-дифференциальных уравнений [1–7], что значительно препятствует использованию аппарата теории ползучести в практике инженерных расчетов. В настоящей статье приводится сравнительно простой метод расчета трехслойной балки с учетом ползучести, который может быть применен в инженерной практике.

Основная часть. Рассматривается шарнирно-опертая по концам балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 1).

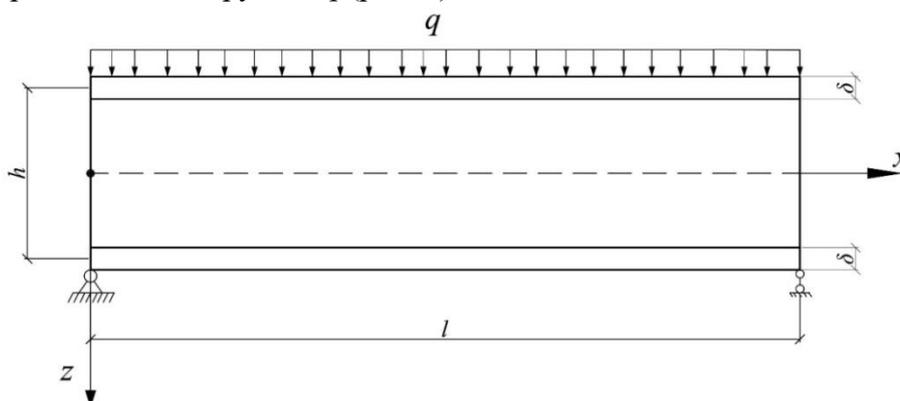


Рис. 1. Расчетная схема

При выводе уравнений принимаются следующие гипотезы:

1. Изгибающий момент полностью воспринимается обшивками.

Исходя из этой гипотезы, изгибающий момент связан с напряжениями в верхней и нижней обшивке следующим образом:

$$M(x) = \sigma_n b \delta \frac{h}{2} - \sigma_e b \delta \frac{h}{2}, \quad (1)$$

где b – ширина балки, h – высота, δ – толщина обшивок.

Равенство (1) можно переписать в виде:

$$\frac{M(x)}{I} = \frac{\sigma_n - \sigma_e}{h}, \quad (2)$$

где $I = b\delta \frac{h^2}{2}$ – момент инерции обшивок.

2. Перемещения по толщине заполнителя распределены по линейному закону:

$$u_c(z) = \frac{u_e + u_n}{2} + \frac{u_n - u_e}{h} z, \quad (3)$$

где u_n и u_e – соответственно перемещения нижней и верхней обшивки.

3. Поперечная сила полностью воспринимается заполнителем, заполнитель работает только на сдвиг, и касательные напряжения по его толщине постоянны. Исходя из этой гипотезы, поперечная сила определяется следующим образом:

$$Q = \tau_c b h = G_3 \gamma_c^{el} b h, \quad (4)$$

где G_3 – модуль сдвига заполнителя,

γ_c^{el} – упругая деформация сдвига заполнителя, представляющая разность между полной сдвиговой деформацией и деформацией ползучести:

$$\gamma_c^{el} = \gamma_c - \gamma_c^*. \quad (5)$$

Вывод разрешающих уравнений. Напряжения в обшивках связаны с перемещениями следующим образом:

$$\sigma_n = E \frac{\partial u_n}{\partial x}; \quad \sigma_e = E \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad (6)$$

где E – модуль упругости обшивок.

Подставив (5) в (2), получим:

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (u_n - u_e). \quad (7)$$

Перемещения и деформации заполнителя связаны соотношением Коши:

$$\gamma_c = \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u_n - u_e}{h} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (8)$$

Подставим (8) в (5), а затем (5) в (4):

$$Q = G_3 b h \left(\frac{u_n - u_e}{h} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_c^* \right). \quad (9)$$

Согласно теореме Журавского, поперечная сила связана с интенсивностью равномерно распределенной нагрузки следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -q.$$

Дифференцируя (9) по x , получим:

$$G_3bh \left(\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (u_n - u_e) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial x} \right) = -q. \quad (10)$$

Подставив (7) в (10), получим основное разрешающее уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI} - \frac{q}{G_3bh} + \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial x}. \quad (11)$$

Методика решения задачи. Уравнение (11) решается численно методом конечных разностей. Изгибающий момент и поперечная сила для рассматриваемой балки определяются следующим образом:

$$M(x) = \frac{qx}{2}(l-x); \quad Q(x) = \frac{ql}{2} - qx.$$

Граничные условия имеют вид $w_{x=0} = w_{x=l} = 0$. На первом этапе выполняется решение упругой задачи ($\gamma_c^* = 0$). Из формулы (4) следует, что для статически определимой балки касательные напряжения в процессе ползучести не меняются. Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, то зная деформацию ползучести и напряжение в текущий момент времени, можно определить скорость роста деформации ползучести и ее величину в момент времени $t + \Delta t$:

$$\gamma_c^*(t + \Delta t) = \gamma_c^*(t) + \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial t} \Delta t.$$

Результаты и обсуждение. Была решена тестовая задача при следующих исходных данных: $l = 1.5$ м, $q = 0.82$ кН/м, $G_3 = 25$ МПа, $E = 0.71 \cdot 10^5$ МПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.06$ м, $\delta = 1$ мм. Использовался закон деформирования, который описывается уравнением Максвелла-Томпсона [8]:

$$\frac{\partial \gamma_c^*}{\partial t} = \frac{1}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{H}{G_3}\right) \tau_c - H \gamma_c^* \right], \quad (12)$$

где $\kappa = 56$ МПа·сут – коэффициент вязкости заполнителя, $H = 15$ МПа – длительный модуль сдвига заполнителя.

Полученный в результате график роста прогиба в середине пролета приведен на рис. 2.

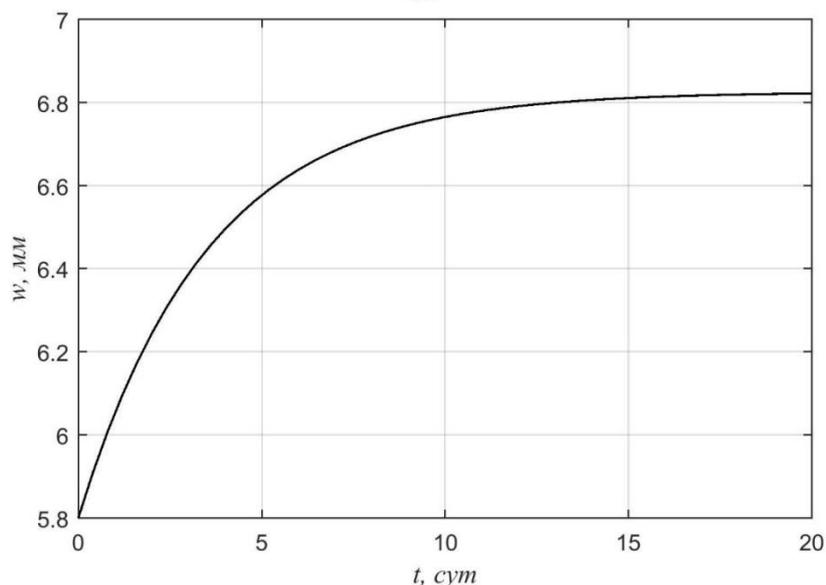


Рис. 2. График роста прогиба

Отметим, что при законе ползучести (12) можно аналитически определить наибольший прогиб балки в конце процесса ползучести. Для этого сначала определим прогиб в середине пролета при $t = 0$. Дифференциальное уравнение (11) для начального момента времени запишется в виде:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \frac{qx}{2} (l-x) - \frac{q}{G_3 A}, \quad (13)$$

где $A = bh$.

Интегрируя уравнение (13), получим:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qx^2 l}{4} - \frac{qx^3}{6} \right) - \frac{q}{G_3 A} x + C_1.$$

$$w(x) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qx^3 l}{12} - \frac{qx^4}{24} \right) - \frac{q}{G_3 A} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий:

$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0;$$

$$w(l) = 0: -\frac{1}{EI} \left(\frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} \right) - \frac{q}{G_3 A} \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0 \rightarrow C_1 = \frac{ql}{2G_3 A} + \frac{ql^3}{24EI}.$$

Выражение для прогиба в середине пролета принимает вид:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^2}{8G_3 A}. \quad (14)$$

При использовании уравнения (12) связь между полными деформациями сдвига и касательными напряжениями в заполнителе при $t \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\tau_c = H\gamma_c.$$

Таким образом, чтобы получить прогиб в конце процесса ползучести, достаточно в выражении (14) заменить мгновенный модуль сдвига заполнителя G_3 на длительный модуль H .

Подставляя исходные данные в формулу (14), при $t = 0$ получим $w_{\max} = 5.77$ мм, а при $t \rightarrow \infty$ $w_{\max} = 6.79$ мм. Результаты, полученные численно, практически совпадают с аналитическим решением.

Заключение. При решении тестовой задачи рассмотрен один из простейших законов ползучести, справедливый для линейно вязкоупругого материала. Однако уравнение (11) позволяет задавать произвольный закон ползучести, в том числе и нелинейный. Для полимеров хорошо согласуется с экспериментальными данными нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича [9]. Методика определения релаксационных констант, входящих в указанное уравнение, приводится в работах [9-10].

Библиографический список.

1. Напряженно–деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона / Б. М. Языев [и др.] // Научное обозрение. — 2014. — №11, ч.3. — С. 759–763.
2. Аваков, А. А. Напряженно-деформированное состояние железобетонной арки с учетом нелинейной ползучести бетона / А. А. Аваков, А. С. Чепурненко, С. Б. Языев // Научно-технический вестник Поволжья. — 2015. — № 1. — С. 27–30.
3. Andreev, V. I. Model of equal-stressed cylinder based on the Mohr failure criterion / V. I. Andreev, A. S. Chepurnenko, B. M. Yazyev // Advanced Materials Research. — 2014. — Т. 887–888. — С. 869–872.
4. Дудник, А. Е. Плоская осесимметричная задача термовязкоупругости для полимерного цилиндра / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, Н. И. Никора // Инженерный вестник Дона: электронный научно-инновационный журнал — 2015. — №1–2. — Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2816> (дата обращения 10.04.2017 г.)
5. Напряженно–деформированное состояние короткого внецентренно сжатого железобетонного стержня при нелинейной ползучести / И. В. Юхнов [и др.] Научное обозрение. — 2014. — №8, ч.3. — С. 929–934.
6. Andreev, V. I. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep / V. I. Andreev, A. S. Chepurnenko, B. M. Yazyev // Advanced Materials Research. — 2014. — Т. 1004–1005. — С. 257–260.
7. Козельская, М. Ю. Расчёт на устойчивость сжатых полимерных стержней с учётом температурных воздействий и высокоэластических деформаций [Электронный ресурс] / М. Ю. Козельская, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Научно–технический вестник Поволжья. — 2013. — №4. — С. 190–194. — Режим доступа: http://ntvp.ru/files/NTVP_4_2013.php (дата обращения 17.04.2017 г.).
8. Литвинов, С. В. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке/ С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. Е. Дудник // Инженерный вестник Дона. — 2016. — Т. 41. № 2 (41). — Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560> (дата обращения 05.05.2017 г.).
9. Chepurnenko, A. S. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures / A. S. Chepurnenko, V. I. Andreev, A. N. Beskopylny, B. M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. — 2016. — Режим доступа : http://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/pdf/2016/30/mateconf_smae2016_06059.pdf (дата обращения 21.05.2017 г.).
10. Дудник, А. Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Пластические массы. — 2016. — № 1–2. — С. 30–33.