

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 624.074.43

### Определение частот и форм собственных колебаний тонких упругих оболочек сложной формы

*В. Д. Еремин*

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

**Аннотация.** Возможность определения частот и форм собственных колебаний является важнейшей задачей динамического расчета строительных конструкций и сооружений. Актуальность настоящего исследования обусловлена ограниченным количеством результатов по расчету оболочек усложненной формы, что связано с большим объемом вычислительной работы, а также недостаточной изученностью механизма работы этих оболочек. Рассмотрен расчет тонкой упругой волнистой оболочки прямоугольной в плане с жестко защемленным нижним контуром. В основу решения задачи положена разработанная автором методика определения численных значений низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких упругих оболочек сложной формы энергетическим методом Релея-Ритца. Эта методика позволяет заменить дифференциальные уравнения однородной системой линейных алгебраических уравнений. Приведены результаты динамического расчета этой тонкой волнистой оболочки. Проведенный численный расчет этой оболочки, на примере которого отработана методика определения низших частот и форм, подтвердил хорошую сходимость разработанного алгоритма, а также позволяет рекомендовать применение предложенной методики в проектной практике.

**Ключевые слова:** частота, форма собственных колебаний, тонкая упругая волнистая оболочка, вариационно-энергетический метод

### Determination of Frequencies and Forms of Natural Oscillations of Thin Elastic Shells of Complex Shape

*Viktor D. Eryomin*

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

**Abstract.** The ability to determine the frequencies and forms of natural oscillations is the most important task of dynamic calculation of building structures. The relevance of this study is due to the limited number of results on the calculation of shells of a complicated form, which is associated with a large amount of computational work, as well as with insufficient knowledge of the work of these shells. In this paper, the calculation of a thin elastic wavy shell rectangular in plan with a rigidly pinched lower contour is considered. The solution to the problem is based on the method developed by the author for determining the numerical values of the lowest frequencies and the corresponding forms of natural oscillations of thin elastic shells of complex shape by the Rayleigh-Ritz energy method. This technique makes it possible to replace differential equations with a homogeneous system of linear algebraic equations. The results of dynamic calculation of this thin wavy shell are presented. The calculation of this shell, on the example of which the method of determining the lowest frequencies and shapes was worked out, confirmed the good convergence of the developed algorithm, and also allows us to recommend the use of the proposed technique in design practice to determine the lowest frequencies and the corresponding forms of natural oscillations of shells of complex non-classical shape.

**Keywords:** frequency, shape of natural oscillations, thin elastic wavy shell, variation-energy method

**Введение.** Современные достижения науки и техники в строительной и архитектурной отраслях вызвали появление новых материалов и технологий возведения конструкций, зданий и сооружений, позволили воплотить в жизнь самые смелые замыслы архитекторов. Заметной особенностью современных архитектурных сооружений является перекрытие огромных пролетов без использования промежуточных опор. С этой точки зрения применение оболочечных конструкций становится наиболее эффективным. В практике строительного производства в настоящее время хорошо зарекомендовали себя и все чаще используются в качестве покрытий общественных, производственных, складских и сельскохозяйственных зданий и сооружений оболочки сложной формы, в том числе и волнистые оболочки.

Широкое использование оболочечных конструкций в качестве большепролетных покрытий потребовало развития теории оболочек как отрасли технических наук. Были разработаны практические методы расчета, созданы упрощенные теории для удобства проектировщиков. Однако проблема совершенствования методов расчета, создания новых более общих теорий, разработки способов быстрой и качественной оценки полученных результатов до сих пор привлекает внимание ученых, работающих в области строительной механики и механики твердого деформированного тела.

Одной из самых важных задач при проектировании строительных конструкций является динамический расчет, так как очень часто они подвергаются воздействию периодических и импульсивных нагрузок, особенно в сейсмических районах. В связи с этим возможность определять собственные частоты и соответствующие им формы свободных колебаний оболочек сложной формы имеет очень важное практическое значение.

Анализируя работы, посвященные вопросам динамики оболочек, легко заметить наличие сравнительно небольшого количества исследований по расчету собственных колебаний оболочек неклассической формы. В частности, в монографии Филиппова А.П. «Колебания деформируемых систем» отмечается, что «... в целом теория колебаний оболочек, особенно оболочек сложных форм, разработана еще недостаточно» [1].

Целью данного исследования является разработка инженерной методики численного определения низших частот и форм свободных колебаний оболочек сложной неклассической формы, которая могла бы применяться в проектной практике. Как частный случай эта методика позволяет реализовать расчет гладких оболочек с любыми граничными условиями. Таким образом, выполненное исследование является актуальным.

В основу решения задачи положена разработанная автором методика определения численных значений низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких упругих оболочек сложной формы энергетическим методом Релея-Ритца, которая не требует составления и решения системы особых дифференциальных уравнений. Эта методика расчета позволяет получить достаточно точные численные значения низших частот и форм собственных колебаний оболочек сложной формы при произвольных граничных условиях и при любом законе изменения ее геометрических и физических характеристик [2–6]. Расчет выполняется на основе геометрической и физической линейности с использованием гипотез Кирхгофа-Лява.

**Постановка задачи.** В качестве примера рассматривается задача определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонкой упругой волнистой оболочки прямоугольной в плане с жестко защемленным нижним контуром (рис. 1).

Поперечное сечение срединной поверхности оболочки (по гребню) очерчено по кривой, уравнение которой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^3} = 1. \quad (1)$$

Срединная поверхность оболочки образована перемещением кривой:

$$\alpha = -\Delta \left(1 - \cos \pi \frac{z}{\ell}\right) \quad (2)$$

по двум соседним гребням оболочки и находящейся в нормальной плоскости к ним. Здесь  $\Delta$  — амплитуда волны косинусоиды;  $2\ell$  — длина волны косинусоиды.

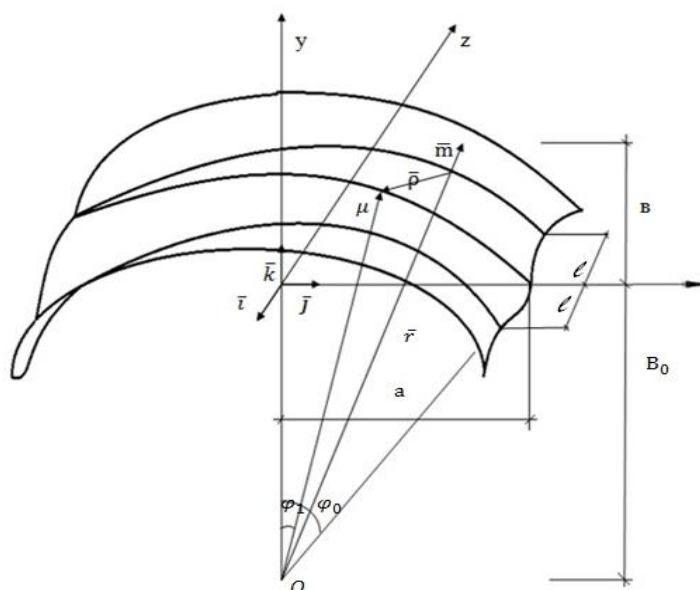


Рис. 1. Поверхность оболочки

Геометрические размеры и физические характеристики оболочки:

- пролет —  $2a = 18\text{м}$ ;
- высота в поперечном сечении, проходящем через гребень оболочки —  $v = 5\text{м}$ ;
- длина волны —  $2\ell = 3\text{м}$ ;
- амплитуда волны —  $\Delta = 0,225\text{м}$ ;
- полюсное расстояние —  $B_o = 9\text{м}$ ;
- толщина оболочки —  $2h = 0,05\text{м}$ ;
- модуль упругости материала оболочки —  $E = 28\text{ГПа}$ ;
- коэффициент Пуассона —  $\mu = \frac{1}{6}$ ;
- плотность материала оболочки —  $\rho = 2500\text{кг/м}^3$ .

**Решение численного примера.** Предполагается, что длина оболочки вдоль оси  $Z$  достаточно велика, поэтому можно ограничиться рассмотрением только ее средних участков. Влияние частей оболочки, примыкающих к ее торцам, не учитывается (рис. 1).

Выведены векторное уравнение срединной поверхности этой оболочки и формулы для вычисления параметров Ляме и символов Кристоффеля данной оболочки [7].

Подобраны функции, аппроксимирующие амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат, в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющие условиям жесткого защемления оболочки по нижнему контуру вдоль образующей ( $\alpha_2 = \pm 1$ :  $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$ ,  $u_{3,2}^0 = 0$ ) [6], (рис. 2).

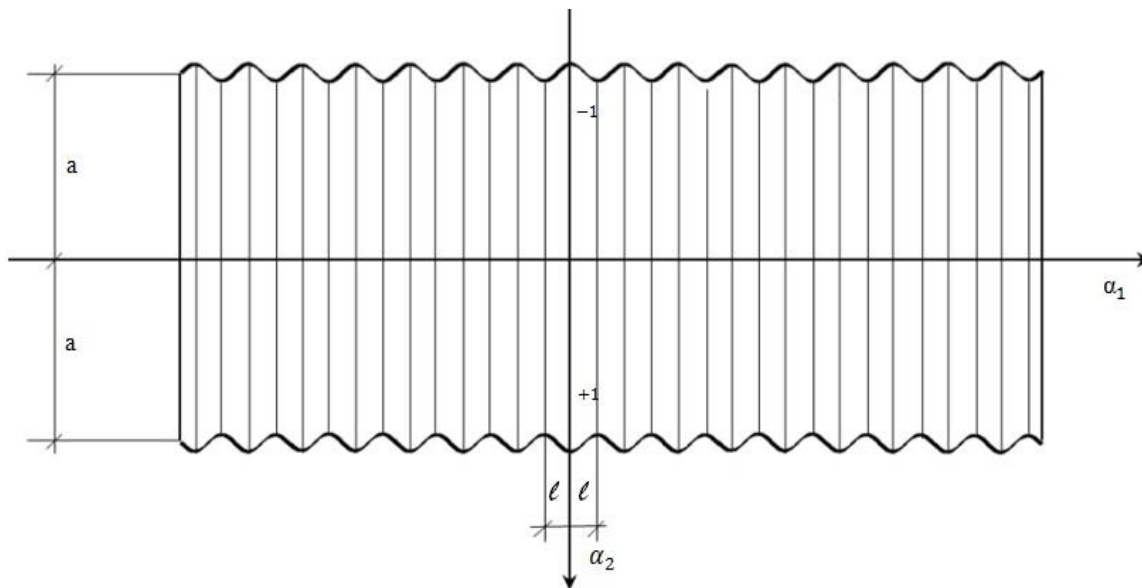


Рис. 2. Расчетная схема оболочки

По формулам, приведенным в [6, 8], вычислены все элементы матриц  $S$  и  $I$ , входящие в формулы для вычисления амплитуд потенциальной и кинетической энергий деформации, а также в формулу обобщенного векового (характеристического) уравнения рассматриваемой волнистой оболочки:

$$|S - \lambda I| = 0, \quad (3)$$

где

$$\lambda = \omega^2 \frac{\rho}{E_1}. \quad (4)$$

Решив это обобщенное вековое уравнение, были получены низшие частоты и соответствующие им формы собственных колебаний данной тонкой упругой волнистой оболочки прямоугольной в плане с жестко защемленным нижним контуром (рис. 1).

Для контроля численной сходимости алгоритма расчет волнистой оболочки, изображенной на рис. 1, производился методом последовательных приближений путем поэтапного увеличения количества членов ряда, аппроксимирующего решение. В первом приближении в двойных тригонометрических рядах,

аппроксимирующих перемещения, было оставлено четыре члена ( $m = n = 2$ ), во втором приближении девять ( $m = n = 3$ ), потом шестнадцать ( $m = n = 4$ ), двадцать пять ( $m = n = 5$ ) и, наконец, тридцать шесть членов ряда ( $m = n = 6$ ). Сравнивая три последних приближения при  $m = n = 4; 5; 6$ , получим достаточную для инженерного расчета сходимость результатов [9, 10].

Результаты вычислений первых трех частот и соответствующих им форм собственных колебаний этой волнистой оболочки, жестко заземленной по нижнему контуру вдоль образующей (рис. 2), приведены на рис. 1–19.

Первая частота ( $\omega_1 = 58,3$  Гц)  
Первая форма собственных колебаний

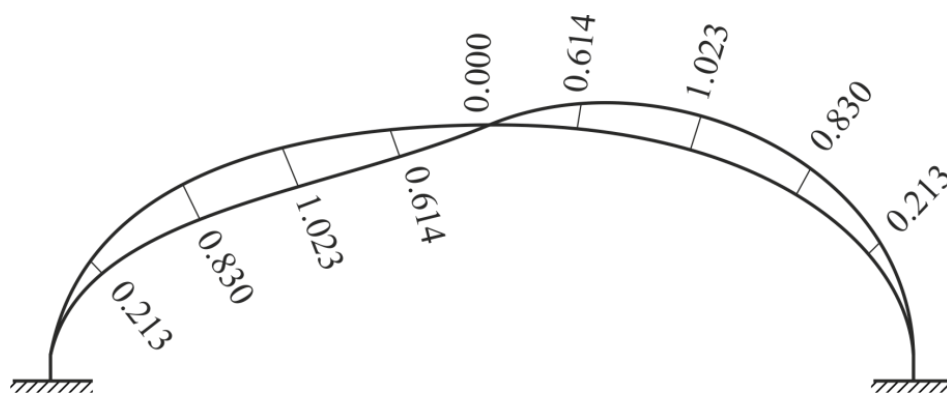


Рис. 1. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_{30} \alpha_1=0$

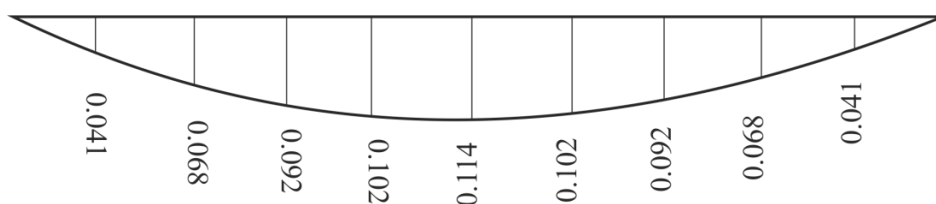


Рис. 2. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_{20} \alpha_1=0$

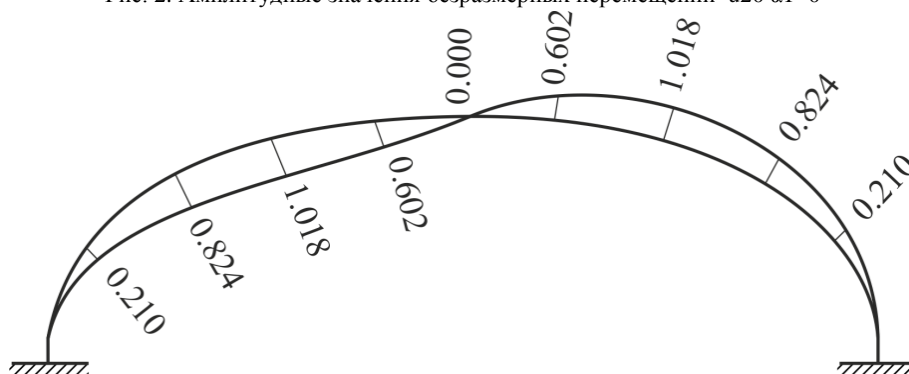


Рис. 3. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_{30} \alpha_1=\pm 0,5$

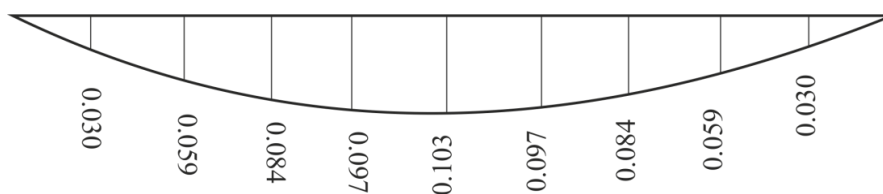


Рис. 4. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0 (\alpha_1 = \pm 0,5)$

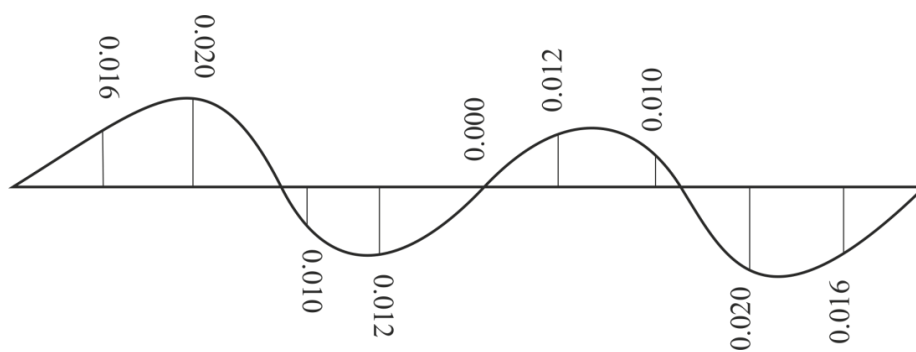


Рис. 5. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  ( $\alpha_1 = +0,5$ )

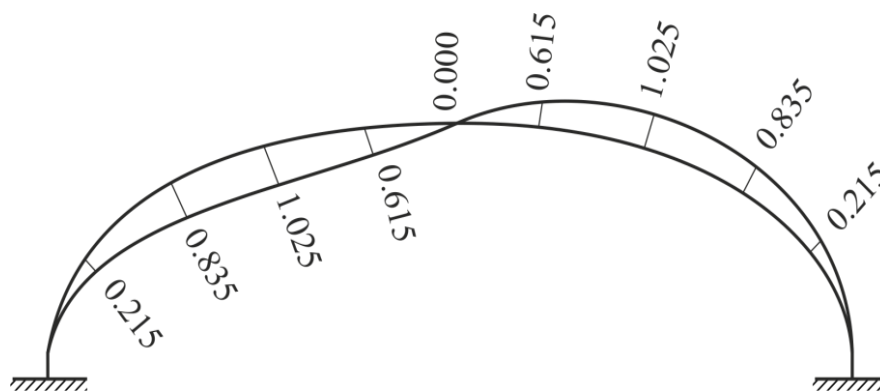


Рис. 6. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_3^0$  ( $\alpha_1 = \pm 1$ )



Рис. 7. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  ( $\alpha_1 = \pm 1$ )

Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  в поперечных сечениях оболочки с координатами  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \pm 1$  равны нулю.

Вторая частота ( $\omega_2 = 66,2$  Гц)  
Вторая форма собственных колебаний

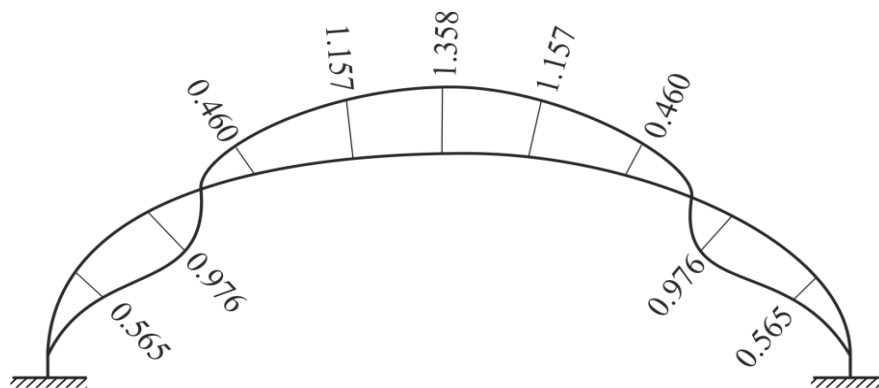


Рис. 8. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_3^0$  ( $\alpha_1 = 0$ )

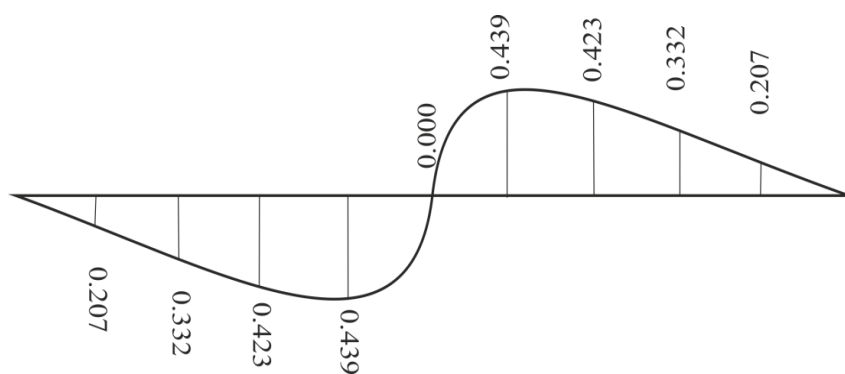


Рис. 9. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  ( $\alpha_1 = 0$ )

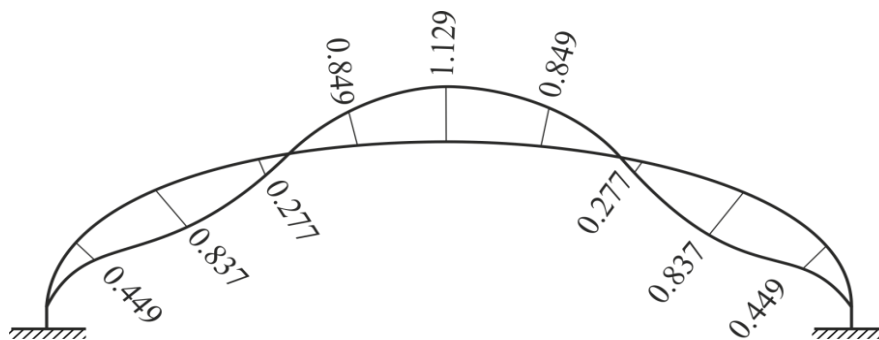


Рис. 10. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_3^0$  ( $\alpha_1 = \pm 0,5$ )

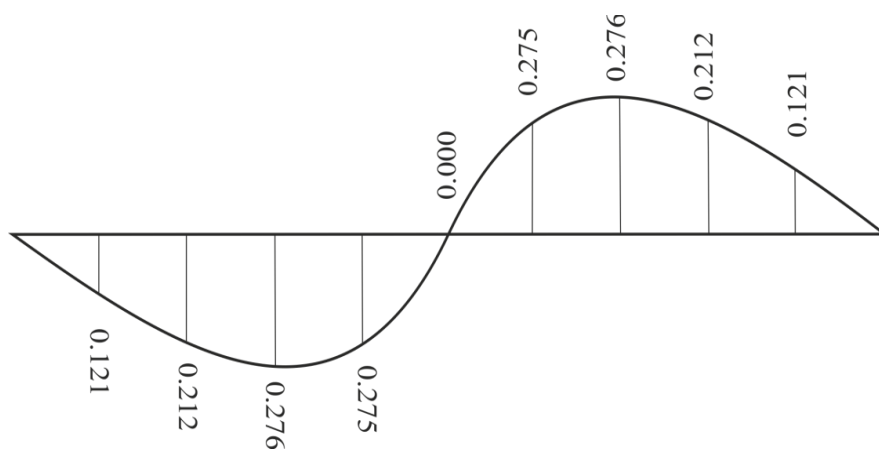


Рис. 11. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  ( $\alpha_1 = \pm 0,5$ )

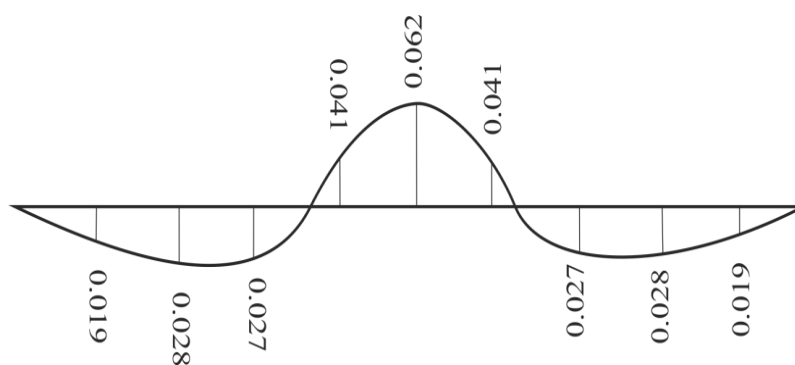


Рис. 12. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  ( $\alpha_1 = +0,5$ )

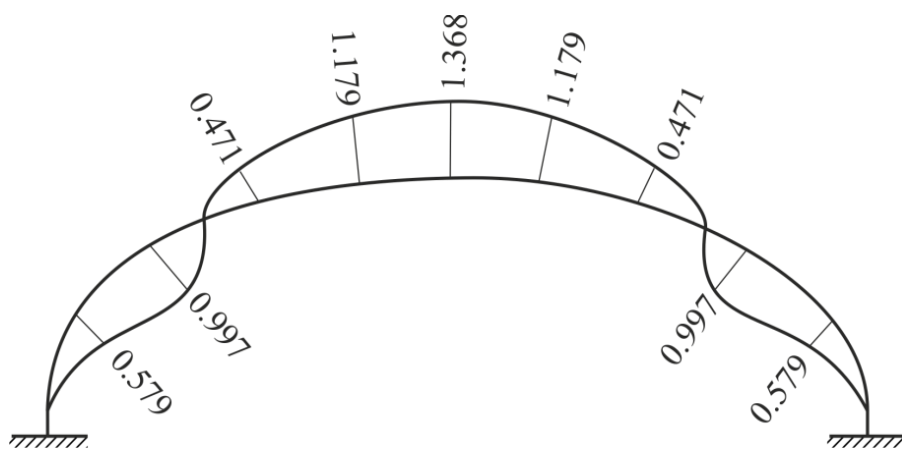


Рис. 13. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_3^0$  ( $\alpha_1 = \pm 1$ )

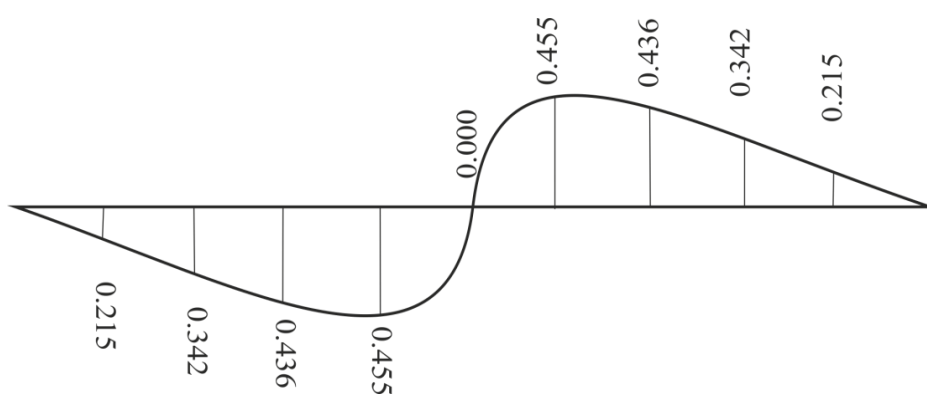


Рис. 14. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  ( $\alpha_1 = \pm 1$ )

Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  в поперечных сечениях оболочки с координатами  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \pm 1$  равны нулю.

Третья частота ( $\omega_3 = 81,4$  Гц)  
Третья форма собственных колебаний

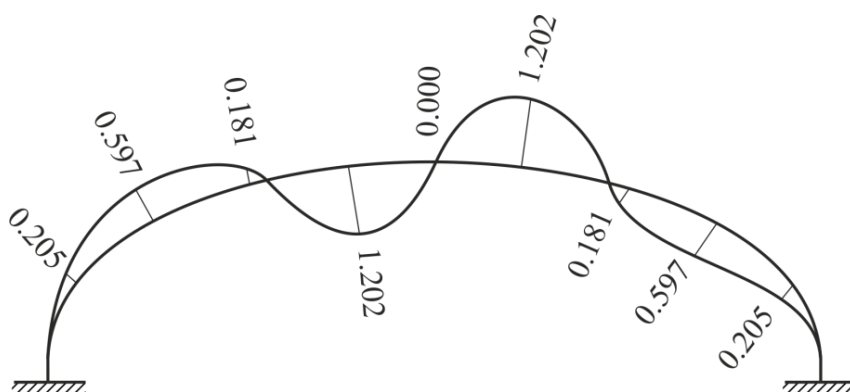


Рис. 15. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_3^0$  ( $\alpha_1 = +0,5$ )

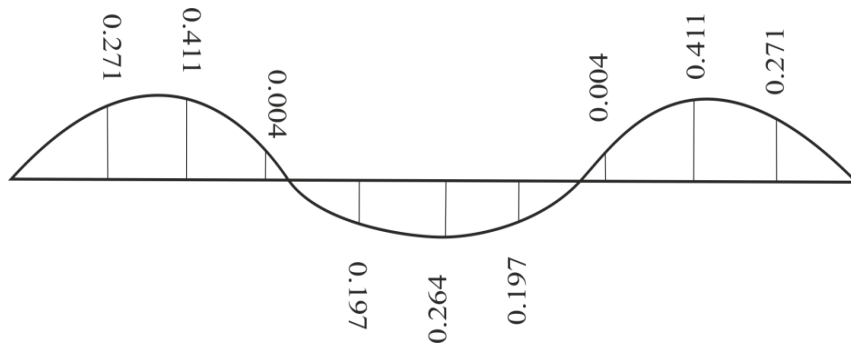


Рис. 16. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  ( $\alpha_1 = +0,5$ )

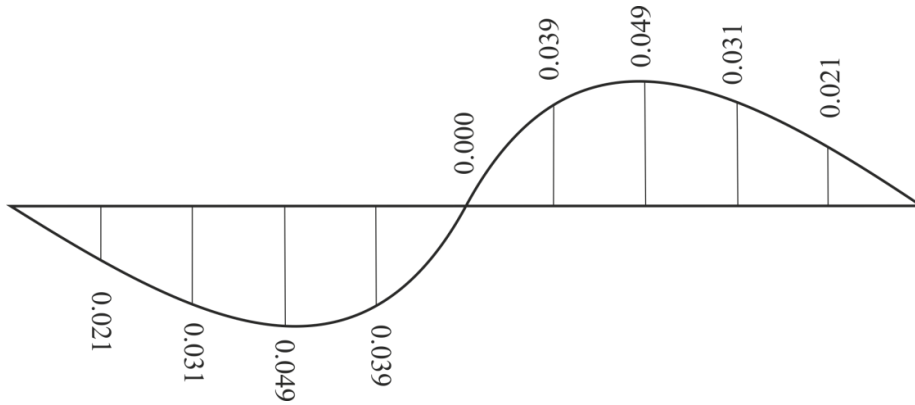


Рис. 17. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  ( $\alpha_1 = \pm 0,5$ )

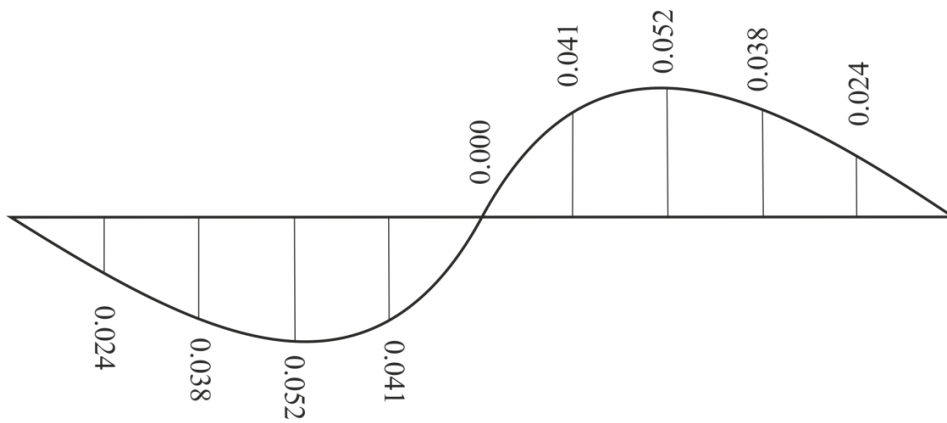


Рис. 18. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  ( $\alpha_1 = 0$ )

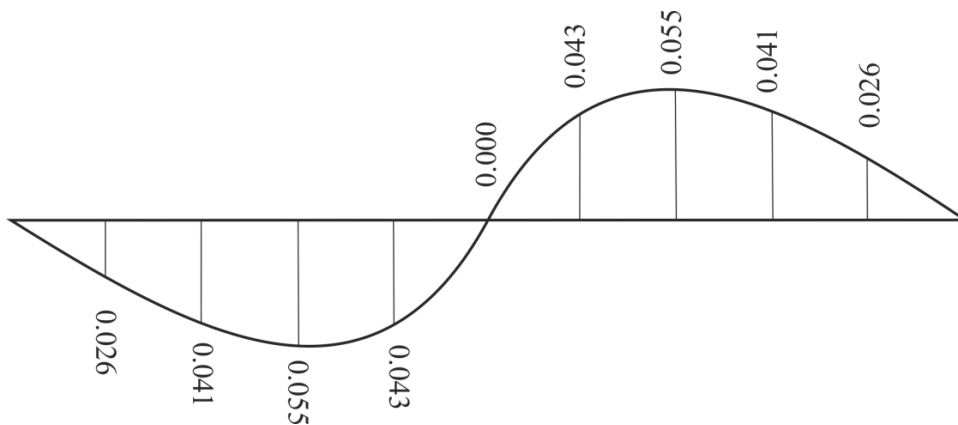


Рис. 19. Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_1^0$  ( $\alpha_1 = \pm 1$ )



Амплитудные значения безразмерных перемещений  $u_2^0$  и  $u_3^0$  в поперечных сечениях оболочки с координатами  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \pm 1$  равны нулю.

На этих графиках, представленных на рисунках 1–19:

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — частоты собственных колебаний тонкой волнистой оболочки;

$u_1^0, u_2^0, u_3^0$  — амплитуды безразмерных перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль осей координат  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  соответственно.

**Выводы.** Проведенный расчет тонкой упругой волнистой оболочки прямоугольной в плане с жестко защемленным нижним контуром, на примере которого отработана методика определения низших частот и форм, подтвердил хорошую сходимость разработанного алгоритма.

Результаты численного расчета этой оболочки позволяют рекомендовать применение предложенной методики в проектной практике для определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек сложной неклассической формы.

### Список литературы

1. Филиппов А. П. *Колебания деформированных систем*. Москва: Машиностроение; 1970. 734 с.
2. Гольденвейзер А. Л. *Теория упругих тонких оболочек*. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука; 1976. 512 с.
3. Аксентян К. Б., Гордеев-Гавриков В. К. *Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений*. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ; 1979. 271 с.
4. Аксентян К. Б., Ерёмин В. Д. Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний. В сб. статей: *Расчет оболочек и пластин*. Ростов-на-Дону: Редакционно-издательский центр РИСИ; 1977. С. 43–52.
5. Амосов А. А. Об использовании уточненных теорий пластин и оболочек при исследовании свободных колебаний. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1990;(1):14–17.
6. Ерёмин В. Д. Определение частот и форм собственных колебаний оболочек неклассической формы. *Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении*. 2015;(1):94–100.
7. Ерёмин В. Д. Собственные колебания некруговой цилиндрической упругой волнистой оболочки открытого профиля. *Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении*. 2015;(1):101–108.
8. Ерёмин В. Д. К расчету собственных колебаний тонкой волнистой оболочки открытого профиля. *Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении*. 2016;(1):64–71.
9. Ерёмин В. Д. Исследование численной сходимости алгоритма определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы. *Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении*. 2016;(1):72–77.
10. Ерёмин В. Д. К вопросу об исследовании численной сходимости алгоритма определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы. *Научные труды Национального университета архитектуры и строительства Армении*. 2017;(3):50–55.

Об авторе:

**Ерёмин Виктор Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [eremin.vd@yandex.ru](mailto:eremin.vd@yandex.ru)

About the Author:

**Viktor D. Eryomin**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Construction Mechanics and Theory of Structures Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), [eremin.vd@yandex.ru](mailto:eremin.vd@yandex.ru)