

УДК 51-37

**СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
SAGE КАК СРЕДСТВО ДЛЯ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ***Д. П. Ашуркин, Н. Ю. Богданова*

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

ashurkinosoba07@gmail.com

nat_bogdanova07@mail.ru

Система компьютерной алгебры *Sage* позиционируется как универсальная математическая среда, объединяющая множество различных открытых программ и библиотек в рамках единого интерфейса. Цель проекта — создание реальной открытой альтернативы коммерческим математическим пакетам *Maple*, *Mathematica* и *Matlab*. Интересной особенностью *Sage* является то, что она изначально спроектирована в виде *web*-приложения, а серверная часть может быть запущена как локально, так и «в облаке». *Sage* предоставляет полностью бесплатный онлайн-сервис, который напрямую конкурирует с аналогичными коммерческими сервисами.

Ключевые слова: *Sage*, компьютерная алгебра, интерфейс, системы уравнений

Введение. В середине XX века на стыке математики и информатики возникло и интенсивно развивается фундаментальное научное направление — компьютерная алгебра, наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов[1-3].

Целью данной работы является знакомство с системой компьютерной алгебры *Sage*, ее назначением и принципом работы.

Для достижения цели в работе были поставлены и решены следующие задачи:

- изучить современные системы компьютерной алгебры;
- применить систему компьютерной алгебры *Sage* для решения систем уравнений.

Современные системы компьютерной алгебры. В настоящее время появилось множество систем компьютерной алгебры: *Singular*, *Sage*, *Derive*, *Maxima* и т.д. Разработка, развитие и даже использование этих систем постепенно выделились в автономную научную дисциплину, относящуюся к информатике.

Самый популярный пакет, находящийся в свободном доступе — *Maxima*. Пакет *Mathematica*, по-видимому, является в настоящий момент наиболее популярным в научных кругах,

UDC 51-37

**COMPUTER ALGEBRA SYSTEM SAGE
AS A MEANS OF SOLVING SYSTEMS OF
EQUATIONS***D. P. Ashurkin, N. Y. Bogdanova*

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ashurkinosoba07@gmail.com

nat_bogdanova07@mail.ru

Sage computer algebra system is positioned as a universal mathematical environment that brings together within a single interface many different public programs and libraries. The purpose of the project is to create a real alternative to commercial software packages like Maple, Mathematica and Matlab. An interesting feature of Sage is that it was originally designed as a web-application, and the back end can be run both locally and "in the cloud". Sage provides a completely free online service that directly competes with similar commercial services.

Keywords: Sage, computer algebra, the interface, the system of equations

особенно среди теоретиков. Пакет предоставляет широкие возможности в проведении символических (аналитических) преобразований, однако требует значительных ресурсов компьютера.

Система компьютерной алгебры Sage. Первая версия системы компьютерной алгебры *Sage* появилась в 2005 г. и к настоящему времени проект *Sage* успел хорошо себя зарекомендовать. Сейчас свой вклад в развитие системы *Sage* вносят около 200 математиков и программистов всего мира, как на добровольной основе, так и при реализации специальных грантов. Координирует усилия по развитию системы профессор Уильям Штейн из университета Вашингтона.

Sage позиционируется как универсальная математическая среда, объединяющая символьные вычисления, численные расчеты, визуализацию данных и математическое программирование. Она объединяет множество различных открытых программ и библиотек (как чисто математических, так и более общего назначения) в рамках единого интерфейса. Целью проекта является создание реальной открытой альтернативы коммерческим математическим пакетам *Maple*, *Mathematica* и *Matlab*.

Технически *Sage* является коллекцией модулей, написанных на языке *Python*, которые интегрируют в единую систему такие программы, как *Maxima*, *Axiom*, *Singular*, *gnuplot*, *R*, *octave*, *LaTeX* и т. д. Всего в *Sage* используется около ста независимых компонентов.

В качестве исходного языка программирования в системе *Sage* выбран популярный язык *Python* («питон»), однако самые объемные по времени выполнения блоки кода реализованы на языке *C/C++*. Этот выбор оказался очень удачным по ряду причин:

- *Python* является интерпретируемым объектно-ориентированным языком с динамической типизацией, сборкой «мусора» и элементами функционального программирования;
- к языку прилагается богатая стандартная библиотека. Кроме того, в свободном доступе имеется множество пакетов по численным методам, линейной алгебре, двумерной и трехмерной графике, распределенным вычислениям, поддержке баз данных и т. д., которые могут заинтересовать пользователей системы *Sage*;
- *Python* — кроссплатформенный язык. Он поставляется с исходными кодами и может быть собран на любой платформе;
- *Python* имеет богатые встроенные средства для документации кода, управления памятью, обработки исключений, отладки программ, тестирования и т. д. [4].

Самой интересной особенностью *Sage* является то, что она изначально спроектирована в виде *web*-приложения, причем серверная часть может быть запущена как локально, так и удаленно, «в облаке». *Sage* предоставляет полностью бесплатный онлайн-сервис, который доступен с любого устройства в любой точке мира, и напрямую конкурирует с аналогичными сервисами коммерческих СКА.

После регистрации на сайте пользователь попадает в простое меню, позволяющее управлять документами *Sage* — создавать и удалять документы в облачном хранилище, скачивать и закладывать их на локальный компьютер. Любой документ можно открыть для совместного доступа выбранным пользователям или опубликовать по уникальной ссылке для всеобщего обозрения.

Документы *Sage* открываются как обычные динамические страницы в браузере и состоят из набора ячеек ввода, под которыми отображается результат обработки выражения — формула, график или иной объект [5].

На рис. 1. представлена панель инструментов *Sage*.



Рис. 1. Панель инструментов

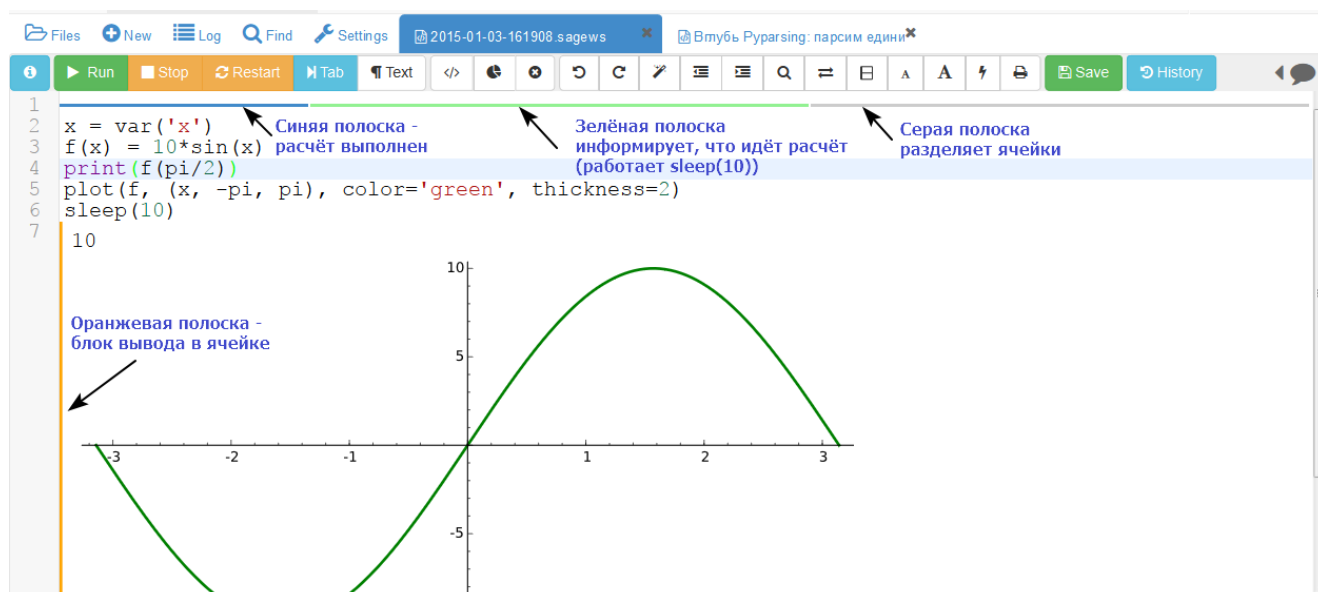


Рис. 2. Скриншот с примером *python*-кода

Вычислить любой код возможно, нажав кнопку *Run* или комбинацию клавиш *shift-enter*. Ниже представлен скриншот с примером *python*-кода и информационными полосками.

Система предоставляет возможность одновременно работать со многими документами в разных вкладках браузера. При закрытии вкладки сам документ остается открытым на сервере, в частности, все незавершенные вычисления продолжают выполняться в фоновом режиме.

Функциональные возможности Sage. Многочисленные возможности *Sage* включают:

- Интерфейс *notebook* для просмотра и повторного использования введённых команд и полученных результатов, включая графики и текстовые аннотации, доступные из большинства современных веб-браузеров. При этом доступно защищённое соединение через протокол *HTTPS*, в случаях, когда важна конфиденциальность. Также *Sage* может выполняться как локально, так и удалённо.
- Математический анализ, реализованный на основе систем *Maxima* и *SymPy*.
- Библиотеки элементарных и специальных математических функций.
- Плоские и трёхмерные графики для функций и данных.
- Средства работы с матрицами и массивами данных с поддержкой разрежённых массивов.
- Различные статистические библиотеки функций.
- Средства визуализации и анализа теории графов.

- Поддержка комплексных чисел, символьных и вычислений с произвольной точностью.
- Подготовка научно-технической документации с использованием редактора формул и возможностью встраивания *Sage* в документацию формата *LaTeX* [4].

Пример. Рассмотрим решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy = 7 \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy = 3 \end{cases}$$

В среде *Sage* система будет выглядеть следующим образом (*Python*-код системы):

```
sage: var('x y')
(x,y)
sage: eq1 = 3*(x^2)*(y^2)+(x^2)-3*x*y==7
sage: eq2 = 10*(x^2)*(y^2)+3*(x^2)-20*x*y==3
sage: solve([eq1,eq2],x,y).
```

В строке ответа получаем следующее решение:

```
[x == -1, y == -2], [x == 1, y == 2].
```

В этой записи содержатся 2 пары x и y , которые являются решением исходной системы уравнений.

Решим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение данной системы требует довольно громоздких вычислений. Но при использовании системы компьютерной алгебры *Sage* решение сводится к нажатию нескольких клавиш.

Вводим условие в систему:

```
sage: var('x y z f g')
(x,y,z,f,g)
sage: eq1 = x+2*y-z+f+g==1
sage: eq2 = 2*x+4*y-4*z+3*f+g==0
sage: eq3 = x+2*y+z+2*f+3*g==2
sage: solve([eq1,eq2,eq3],x,y,z,f,g).
```

В строке ответа получаем:

```
[[x == -5/4*r1 - 2*r2 + 9/4, y == r2, z == -3/4*r1 + 3/4,
f == -1/2*r1 - 1/2, g == r1]].
```

В классическом виде ответ записывается следующим образом:

$$x = \frac{1}{4}(9 - 8r_2 - 5r_1),$$

$$y = r_2,$$

$$z = \frac{3}{4}(1 - r_1),$$

$$f = -\frac{1}{2}(r_1 + 1),$$

$$g = r_1,$$

где r_1, r_2 — произвольные числа.

Рассмотрим решение системы уравнений с тремя неизвестными и комплексными коэффициентами. Итак, система имеет вид:

$$\begin{cases} x - 2iy + z = 2, \\ x - y + iz = 3, \\ (1 + i)x + 3iy - 3z = 0. \end{cases}$$

Вводим условие в виде алгоритма:

```
sage: var('x y z')
(x,y,z)
sage: eq1 = x-2*i*y+z==2
sage: eq2 = x-y+i*z==3
sage: eq3 = (1+i)*x+3*i*y-3*z==0
sage: solve([eq1,eq2,eq3],x,y,z).
```

Нажав кнопку выполнения алгоритма, в строке ответа получим:

```
[[x == (-1 + 4/3), y == (-1/9*I - 8/9), z == (-7/9*I + 8/9)].
```

Решение системы можно записать следующим образом:

$$x = \frac{4}{3} - i,$$

$$y = -\frac{8}{9} - \frac{1}{9}i,$$

$$z = \frac{8}{9} - \frac{7}{9}i.$$

Заключение. *SageMath* построен из почти 100 пакетов с открытым исходным кодом и имеет единый интерфейс.

Появление современных вычислительных систем значительно облегчает доступ к компьютеру непрофессионалам в области программирования и поддерживает постоянное стремление к усовершенствованию и освоению новых компьютерных технологий. Исполняемые файлы доступны для операционных систем *Linux*, *OS X* и *Solaris*. Несмотря на то, что *Microsoft* спонсировала разработку версии *Sage* специально под операционную систему *Windows*, на данный момент пользователям этой операционной системы нужно использовать технологию виртуализации для работы с *Sage*.

Существуют следующие варианты запуска системы компьютерной алгебры *Sage* на ОС *Windows*:

1. через специальную «виртуальную машину», эмулирующую *Linux* (например, *VirtualBox*);
2. через онлайн-версию *Sage*, находящуюся по адресу <http://cloud.sagemath.com/>. В этом случае *Sage* работает на удаленном сервере, а пользователь взаимодействует с ней через обычный браузер. Все рабочие документы сохраняются в «облаке».

Библиографический список

1. Морзеев, Ю. Современные системы компьютерной математики [Электронный ресурс] / КомпьютерПресс. — Режим доступа: <http://compress.ru/article.aspx?id=12530>_(дата обращения : 01.07.16).
2. Сиразов, Ф. С. Применение систем компьютерной алгебры в обучении элементам абстрактной и компьютерной алгебры / Ф. С. Сиразов // Изв. Российского гос. пед. ун-та им. А. И. Герцена. — 2009. — № 116. — С. 223–227.
3. Семенов, С. П. Современные системы компьютерной алгебры / С. П. Семенов, В. В. Славский // Изв. Алтайского гос. ун-та. — 1998. — № 1. — С. 20–22.
4. Голубков, А. Ю. Компьютерная алгебра в системе SAGE / А. Ю. Голубков, А. И. Зобнин, О. В. Соколова. — Москва, изд-во Московского гос. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2013. — 79 с.
5. Яцкин, Н. И. Алгебраические вычисления в системе SAGE / Н. И. Яцкин. — Иваново, изд-во Ивановск. гос. ун-та, 2014. — 45 с.