ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 681.3.681.5

Сравнение различных подходов решения задачи нахождения минимальной стоимости доминирующего множества взвешенного графа

В.Р. Самодурова, В.Г. Кобак
Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Аннотация. Рассмотрена двухкритериальная задача нахождения доминирующего множества, где первым критерием выступает минимальность суммы, а вторым — минимальность множества. Проанализировано, насколько будет улучшаться результат для одного критерия при исключении другого. В сравнении использован метод Магу, который является точным, имеет основу в виде булевого выражения и алгоритм, относящийся к жадной эвристике. Тестирование проведено для графов размерностью 10, 15, 20, 25 с весами в диапазоне 10–20, 10–35, 10–20 и 10–100.

Ключевые слова: эвристический алгоритм, метод Магу, сумма минимального устойчивого множества графа, взвешенный граф, сумма доминирующего множества, минимальное доминирующее множество.

Comparison of Different Approaches to Solving the Problem of Finding the Minimum Cost Dominating set in a Weighted Graph

Valery G Kobak**, **Valeriya R Samodurova
Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

Abstract. In this article, we consider the bicriteria problem of finding the minimum cost dominating set in a weighted graph, where the first criterion is the minimization of the sum and the second criterion is the minimization of the set size. We analyze how the exclusion of one criterion improves the result for the other. We compare the Magu method, which is exact and based on a Boolean expression, and a greedy heuristic algorithm. We test the algorithms on graphs of size 10, 15, 20, and 25 with weights in the range of 10-20, 10-35, 10-20, and 10-100.

Keywords: heuristic algorithm, Magu method, minimum stable set sum of a graph, weighted graph, dominating set sum, minimum dominating set, greedy heuristic.

Введение. В теории графов доминирующее множество вершин в графе — это подмножество вершин таких, что каждая вершина графа либо принадлежит к доминирующему множеству, либо имеет хотя бы одного соседа, принадлежащего к доминирующему множеству [1]. Однако во многих реальных ситуациях вершины графа могут иметь различный вес или стоимость. В таких случаях может быть важно найти минимальное суммарное значение весов вершин в доминирующем множестве. Более того, часто в жизни необходимо минимизировать множество по количеству вершин, входящих в него [2].

Целью данной статьи является сравнение результатов для задачи нахождения доминирующего множества взвешенного графа при двух критериях — минимальность суммы и минимальность времени, при исключении одного из критериев.

Основная часть. Для графа $G = (V, E)$ доминирующее множество вершин есть множество вершин S ⊆ V, где каждой для каждой вершины X_i, не входящей в S, существует дуга, идущая из некоторой вершины множества S в вершину X_i. Доминирующее множество называется минимальным, если нет другого доминирующего подмножества, содержащегося в нём [3].

Рассмотрим точный алгоритм, который будет использоваться в данной статье для решения двухкритериальной задачи. Метод Магу может быть представлен в виде нескольких шагов [4]:

- построение матрицы смежности для взвешенного графа;
- создание конъюнкции элементарных дизъюнкций, отождествляющих строки матрицы смежности;
- получение дизъюнктивной нормальной формы путём приведения полученного выражения;

– формирование внешне устойчивого множества из вершин, входящих в каждую элементарную конъюнкцию;

– выбор минимальных по мощности доминирующих множеств (при наличии критерия минимальности множества);

– вычисление суммы вершин для каждого доминирующего множества;

– выбор множества, имеющего минимальную сумму (при наличии критерия минимальной суммы).

Практический пример. Допустим, что существует компания, занимающаяся строительством станций в море для различных целей [5]. Местоположение станций в море можно представить в виде графовой модели, изображённой на рис. 1, где каждая вершина графа представляет одну станцию, ребра между вершинами указывают на наличие связей между станциями, а веса — финансовые затраты на строительство. Строительство каждой из станций занимает одинаковое количество времени. Нужно найти минимальное суммарное значение затрат и времени на строительство станций, которые будут обеспечивать связность всего графа и эффективность его работы. Поскольку на строительство каждой станции необходимо одинаковое количество времени, то минимальным по времени будет то решение, которое будет содержать в себе наименьшее количество станций. Таким образом приходим к задаче нахождения суммы минимального доминирующего множества [6].

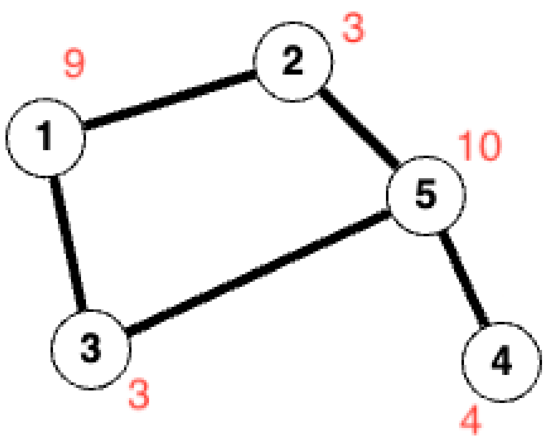


Рис. 1. Рассматриваемый неориентированный взвешенный граф

Матрица смежности, получаемого благодаря данному графу, выглядит так, как проиллюстрировано на рис. 2.

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Рис. 2. Матрица смежности для рассматриваемого взвешенного графа

Создадим конъюнкции элементарных дизъюнкций:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee X_2 \vee X_5)(X_1 \vee X_3 \vee X_5)(X_4 \vee X_5)(X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee X_5)$$

С помощью применения закона поглощения к четвёртой и пятой скобке получим [7]:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3)(X_1 \vee X_2 \vee X_5)(X_1 \vee X_3 \vee X_5)(X_4 \vee X_5).$$

Раскроем первую и вторую скобку с помощью операции логического выражения:

$$(\, X_1 \vee X_1X_2 \vee X_1X_5 \vee X_1X_2 \vee X_2 \vee X_2X_5 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3 \vee X_3X_5)(X_1 \vee X_3 \vee\vee X_5)(X_4 \vee X_5).$$

Применяя закон поглощения для первой скобки, получим:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3X_5)(X_1 \vee X_3 \vee X_5)(X_4 \vee X_5).$$

Аналогичным образом получаем следующее выражение:

$$X_1X_4 \vee X_1X_5 \vee X_2X_3X_4 \vee X_2X_5 \vee X_3X_5.$$

Следовательно, внешне устойчивыми для исходного графа будут являться следующие множества:

$$\{X_1, X_4\}, \{X_1, X_5\}, \{X_2, X_3, X_4\}, \{X_2, X_5\}, \{X_3, X_5\}.$$

Рассчитаем суммы весов вершин для каждого из найденных доминирующих множеств:

$$S_{1,4} = 9 + 4 = 13$$

$$S_{1,5} = 9 + 10 = 19$$

$$S_{2,5} = 3 + 10 = 13$$

$$S_{3,5} = 3 + 10 = 13$$

$$S_{2,3,4} = 3 + 3 + 4 = 10$$

Минимальными внешне устойчивыми множествами тогда будут являться следующие:

$$\{X_1, X_4\}, \{X_1, X_5\}, \{X_2, X_5\}, \{X_3, X_5\}.$$

Таким образом, если в задаче необходимо учесть два критерия — минимальность доминирующего множества и минимальность суммы, решением будет являться любое из множеств: $\{X_1, X_4\}$, $\{X_2, X_5\}$, $\{X_3, X_5\}$, где сумма будет составлять 13. Если же в задаче оставить только критерий наименьший суммы, то решением будет являться $\{X_2, X_3, X_4\}$, где сумма равна 10.

Эксперимент. Для вычислительного эксперимента использовался компьютер на процессоре AMD Ryzen 7 3700U with Radeon Vega Mobile Gfx 2.30 GHz, имеющий 8 гигабайт оперативной памяти, жесткий диск SSD. Было разработано программное средство на Python. Графы для экспериментов были без петель, ненаправленные, взвешенные, связные и генерировались случайным образом с помощью заполнения матрицы смежности. Было проведено по 100 тестов для 10, 15, 20, 25 вершин с весом в диапазоне 10–20,10–35,10–50,10–100.

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 1, где среднее количество доминирующих множеств с минимальной суммой — столбец A; среднее количество минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой — столбец B; среднее отклонение минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества — столбец C; процентное соотношение минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой ко всем минимальным доминирующим множествам — столбец D; максимальное количество минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой на данном диапазоне — столбец E.

Таблица 1

Результаты вычислительных экспериментов

Количество вершин	**Диапазон веса для вершин**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
10	10-20	1,15	1,15	0%	40,7%	3
10	10-35	1,12	1,07	0,84%	40,1%	2
10	10-50	1,06	1,01	1,46%	38,9%	2
10	10-100	1,06	1,01	6,88%	38,5%	1
15	10-20	1,23	1,22	0,01%	34%	7
15	10-35	1,17	1,12	1,07%	31,8%	3
15	10-50	1,06	1,04	1,46%	31,9%	3
15	10-100	1,06	1,03	8,21%	31,5%	2
20	10-20	1,39	1,38	0,06%	25,4%	4
20	10-35	1,19	1,13	1,82%	24,9%	3
20	10-50	1,14	1,09	4,22%	24,2%	2
20	10-100	1,12	1,08	11,86%	24,1%	2
25	10-20	1,42	1,41	0,12%	23,4%	9
25	10-35	1,2	1,16	1,55%	21,3%	3
25	10-50	1,16	1,05	4,61%	21,1%	4
25	10-100	1,1	1,04	11,16%	20,9%	2

Изобразим зависимость среднего количества доминирующих множеств с минимальной суммой от количества вершин на рис. 3, где линия 1 — результаты в диапазоне 10–20, линия 2 — результаты в диапазоне 10–35, линия 3 — результаты в диапазоне 10–50, линия 4 — результаты в диапазоне 10–100,

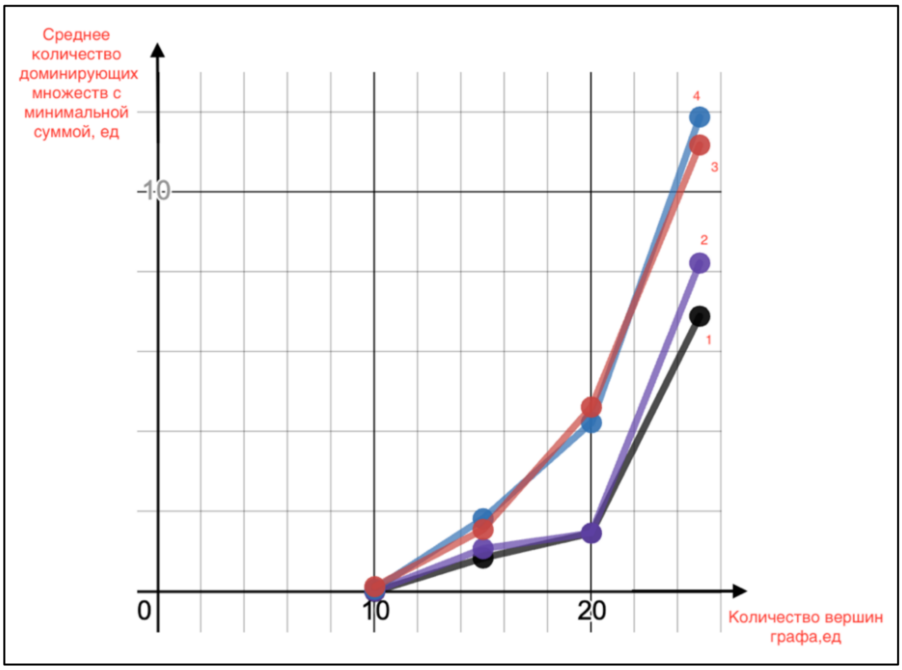
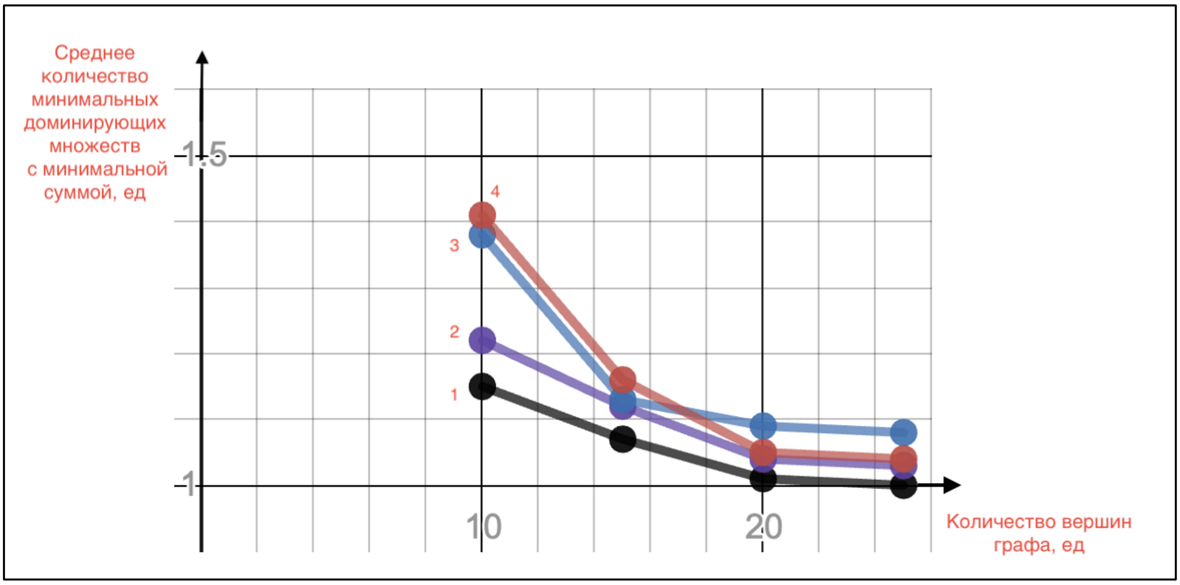


Рис. 3 Зависимость среднего количества доминирующих множеств минимальной суммой от количества вершин



c

Рис. 4 Зависимость среднего количества минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой от количества вершин

Изобразим зависимость среднего количества минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой от количества вершин на рис. 4. Зависимость среднего отклонения минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества от количества вершин представлена на рис. 5, где линия 1 — результаты в диапазоне 10–20, линия 2 — результаты в диапазоне 10–35, линия 3 — результаты в диапазоне 10–50, линия 4 — результаты в диапазоне 10–100.

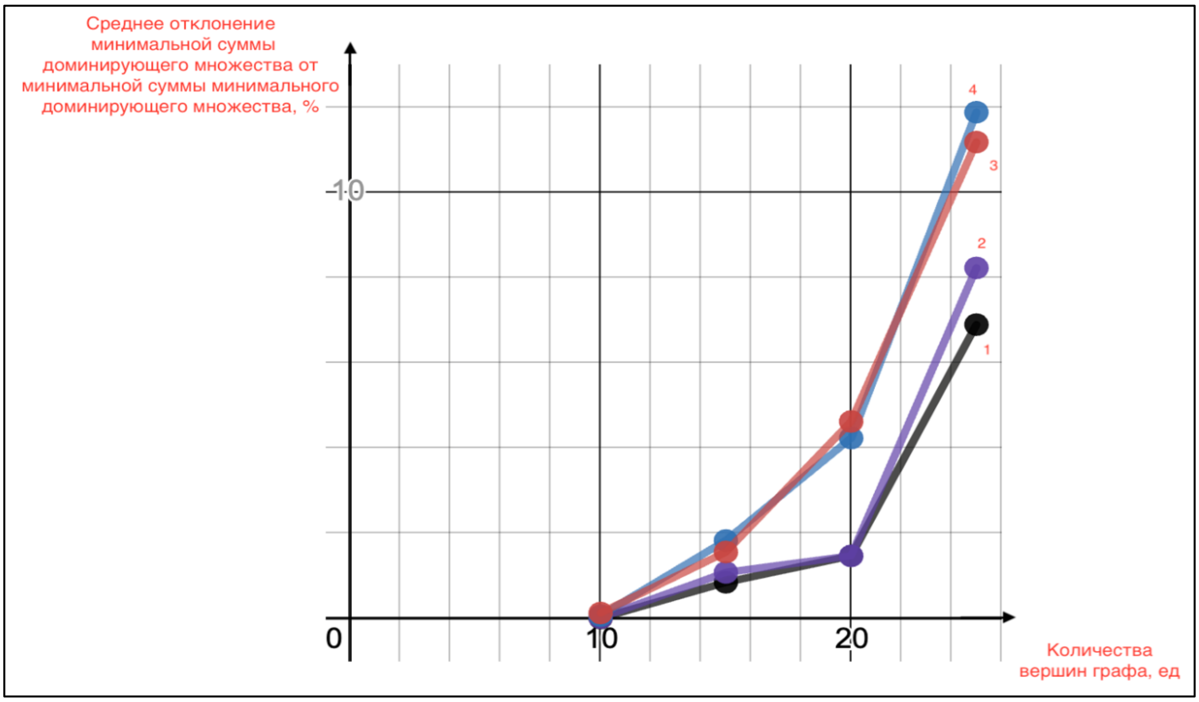


Рис. 5. Зависимость среднего отклонения минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества от количества вершин графа

Выводы

1. При увеличении количества вершин графа наблюдается рост среднего количества доминирующих множеств, среднего количества минимальных доминирующих множеств, среднего отклонения минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества.

2. При увеличении количества вершин графа наблюдается снижение процентного соотношения минимальных доминирующих множеств ко всем доминирующим множествам.

3. При увеличении диапазона вершин наблюдается рост среднего количества доминирующих множеств, среднего количества минимальных доминирующих множеств, среднего отклонения минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества и снижение процентного соотношения минимальных доминирующих множеств ко всем доминирующим множествам.

4. Для графа любой размерности от 10 до 25 вершин при диапазоне весов 10–20 среднее отклонение минимальной суммы доминирующего множества от минимальной суммы минимального доминирующего множества составляет не более 1%.

5. При увеличении размерности графа максимальное количество минимальных доминирующих множеств с минимальной суммой растёт, что свидетельствует о увеличении многообразия решения, а при увеличении диапазона весов, напротив, снижается количество и сокращаются варианты решения.

6. Для графов размерностью от 10 до 25 и с диапазонами 10–20,10–35,10–50,10–100, в случае включения второго критерия, минимальность множества минимальная сумма может ухудшиться в среднем до 12%.

Библиографический список

1. Кристофидес Н. *Теория графов, Алгоритмический подход*. Москва: Мир; 1978. 432 с.

2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация*. Москва: Мир; 1982. 101 с.

3. Ойстин Оре. *Теория графов*, 2-е изд. Москва: Мир; 1980, 336 с.

4. Кобак В.Г., Трощий В.С. Экспериментальное исследование различных характеристик симметричного графа при использовании ядер, полученных с помощью метода Магу. *Известия вузов, Северо-Кавказский регион, Серия: Технические науки*. 2022;3(215):5–10. URL: https://cyberleninka,ru/article/n/eksperimentalnoe-issledovanie-razlichnyh-harakteristik-simmetrichnogo-grafa-pri-ispolzovanii-yader-poluchennyh-s-pomoschyu-metoda (дата обращения: 22.02.2022).

5. Kolokolov A.A., Zaozerskaya L.A. A Solving a Bicriteria Problem of Optimal Service Centers Location. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research.* 2013;12(2)105–116. DOI:10.1007/s10852-012-9203-7

6. Берж К. *Теория графов и её применения*. Москва: Издательство Иностранной Литературы; 1962. 320 с.

7. Осипова В.А. *Основы дискретной математики*. Москва: Форум: ИНФРА-М; 2006. 160 с.

Об авторах:

Кобак Валерий Григорьевич, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор технических наук, valera33305@mail,ru

Самодурова Валерия Романовна, студент кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), Mironova22092001@mail,ru

About the Authors:

Valery G Kobak, professor of the Computer Engineering and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Dr. Sci. (Eng.), valera33305@mail.ru

Valeriya R Samodurova, student of the Computer Engineering and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Mironova22092001@mail.ru