



УДК 624.04

**ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА
ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛОТИНЫ
ЧИСЛЕННЫМ И АНАЛИТИЧЕСКИМ
МЕТОДАМИ**

Донскова Д. О.

Донской государственный
технический университет, Ростов-на-Дону,
Российская Федерация
Dara.359@yandex.ru

Выполнено сравнение численного решения при помощи метода конечных элементов с результатами аналитического расчета на основе полуобратного метода для треугольной плотины, испытывающей действие собственного веса и гидростатического давления. Задача решается в двумерной постановке. При аналитическом решении функция напряжений принимается в виде полинома с 4 неопределенными коэффициентами. Установлено существенное расхождение эпюр напряжений в приопорной зоне, полученных в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013, и на основе аналитического решения (отличаются не только максимальные величины напряжений, но и характер эпюр). В то же время для сечений, весьма удаленных от опорной зоны, результаты совпадают. Рекомендовано при расчете и проектировании плотин вместо аналитических методов применять современные МКЭ комплексы.

Ключевые слова: треугольная плотина, гидростатическое давление, напряженно-деформированное состояние, численные и аналитические методы, теория упругости, метод конечных элементов.

Введение. Плотины треугольного профиля относятся к одним из наиболее экономичных с точки зрения расхода материала. Такие конструкции должны удовлетворять следующим условиям: отсутствие растягивающих напряжений в бетоне, а также достаточная устойчивость тела плотины против сдвига по основанию. С целью удовлетворения перечисленным требованиям необходимо выполнять прочностной расчет указанных конструкций. Определе-

UDC 624.04

**CALCULATION FEATURES OF
TRIANGULAR DAM BY NUMERICAL
AND ANALYTICAL METHODS**

Donskova D.O.

Don State Technical University
Rostov-on-Don,
Russian Federation
Dara.359@yandex.ru

The article provides the comparison of the numerical solution using a finite element method with the results of analytical calculation on the basis of the semi-inverse method for the triangular dam suffering the action of a its own weight and hydrostatic pressure.

The problem is solved in a two-dimensional statement. At the analytical solution, stress function is adopted in the form of a polynom with 4 uncertain coefficients. A significant discrepancy between the stress diagrams in the support zone is established in the LIRA-SAPR 2013 program and with the analytical solution (not only the maximum stresses are different, but also the character of the diagrams). At the same time, the results coincide for the sections, which are very remote from a foundation zone. It is recommended to apply modern finite element method complexes instead of analytical methods during the calculation and design of dams.

Keywords: Triangular dam, hydrostatic pressure, stress-strain state, numerical and analytical methods, theory of elasticity, finite elements method

ние напряженно-деформированного состояния треугольных плотин может выполняться при помощи численных и аналитических методов теории упругости. В работах [1–5] рассматривается численное решение плоских задач теории упругости с использованием метода конечных разностей. Для треугольной плотины применение указанного метода не представляется возможным. Более универсальным является метод конечных элементов (МКЭ), который при решении двумерных задач механики деформируемого твердого тела используется в работах [6–10].

Цель автора данной статьи — выполнить сравнение напряжений в треугольной плотине, полученных при помощи МКЭ, с результатами аналитического расчета.

Постановка и аналитическое решение задачи. Рассматривается треугольная плотина, жестко защемленная в основании под действием собственного веса и гидростатического давления (рис. 1). Высота плотины $h_0 = 3.2$ м, угол при вершине $\beta = 38^\circ$, удельный вес материала плотины $\rho = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, удельный вес жидкости $\gamma = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

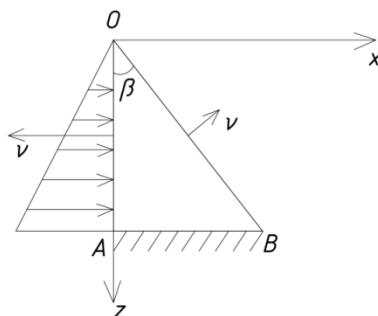


Рис. 1. Расчетная схема

Основным разрешающим уравнением для плоской задачи теории упругости служит бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0. \quad (1)$$

Функцию напряжений φ в соответствии с [11] принимаем в виде полинома с 4 неопределенными коэффициентами A, B, C, D :

$$\varphi = \frac{A}{6} x^3 + \frac{B}{2} x^2 z + \frac{C}{2} x z^2 + \frac{D}{6} z^3. \quad (2)$$

Напряжения в плотине определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = Cx + Dz; \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Ax + Bz; \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - Xz - Zx = -Bx - Cz - \rho x, \end{aligned} \quad (3)$$

где X и Z — составляющие объемной нагрузки.

По формулам (3) видно, что при заданной функции φ напряжения являются линейными функциями координат.

Функция (2) тождественно удовлетворяет уравнению (1). Коэффициенты A, B, C, D определяются из граничных условий на гранях OA и OB . Для этого используются условия на поверхности, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xz} \cdot n; \\ Z_v &= \tau_{zx} \cdot l + \sigma_z \cdot n, \end{aligned} \quad (4)$$

где l и n — направляющие косинусы нормали к грани, X_v и Z_v — составляющие поверхностной нагрузки вдоль осей x и z .

Для грани OA :

$$x = 0; l = \cos(x, \nu) = -1; n = \cos(z, \nu) = 0; X_v = \gamma z; Z_v = 0. \quad (5)$$

Для грани OB :

$$\begin{aligned} x &= z \operatorname{tg} \beta; l = \cos(x, \nu) = \cos(\beta); n = \cos(z, \nu) = \cos(90^\circ + \beta) = \sin(\beta); \\ X_v &= 0; Z_v = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (3), (5), (6) в (4), получим следующие формулы напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma z; \\ \sigma_z &= \left(-\frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} + \frac{\rho}{\operatorname{tg} \beta} \right) \cdot x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \rho \right) \cdot z; \\ \tau_{xz} &= -\left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \rho \right) \cdot x - \rho z = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} \cdot x. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2 приведены эпюры напряжений в защемлении ($z = 3.2$ м), построенные по формулам (7).

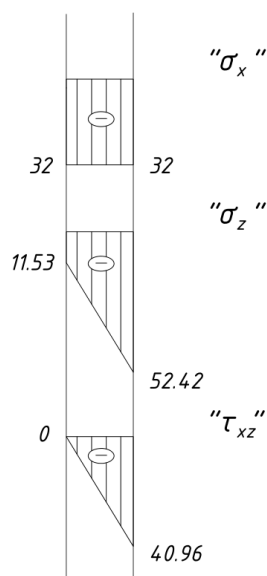


Рис.2. Эпюры напряжений в кПа для опорной зоны, полученные аналитически

Решение задачи при помощи метода конечных элементов. Расчет в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013 выполнялся в двумерной постановке (2 степени свободы в узле). Использовались плоские треугольные конечные элементы. Расчетная схема приведена на рис. 3.

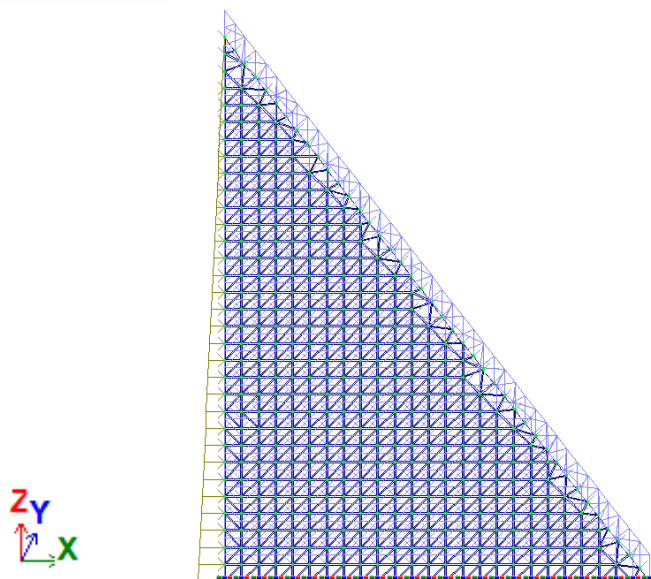


Рис.3. Расчетная схема в программном комплексе ЛИРА-САПР-2013

Полученные в результате изополя напряжений σ_x , σ_z и τ_{xz} приведены на рис. 4–6.

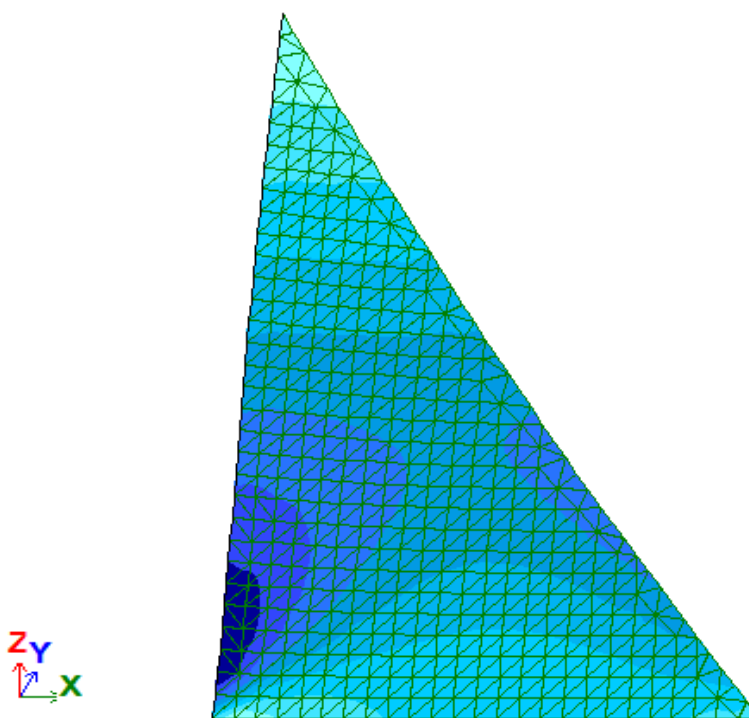
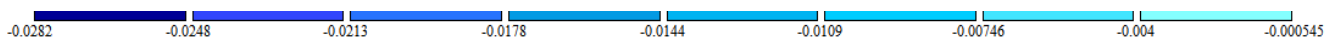
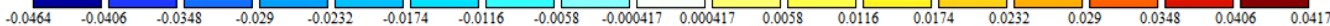
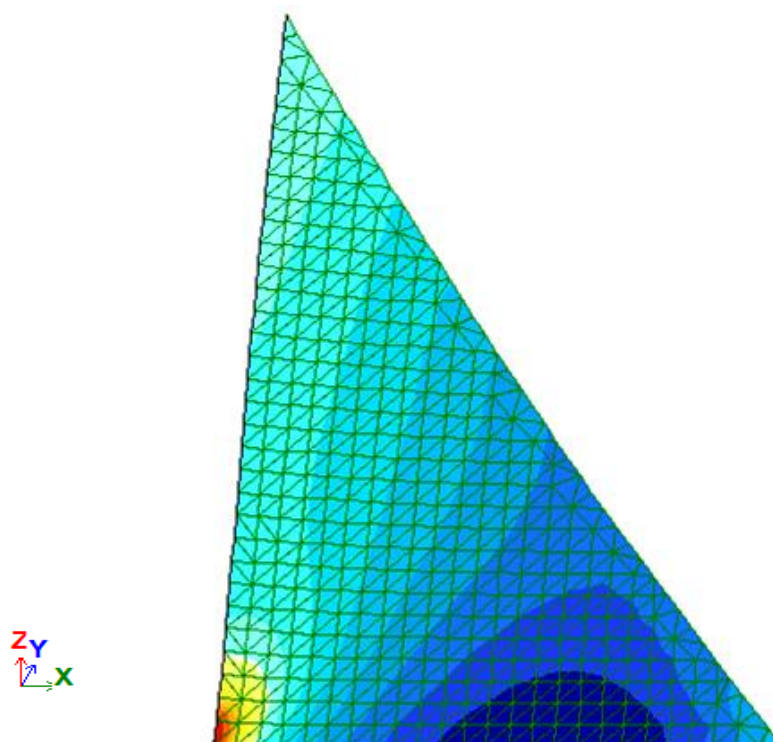
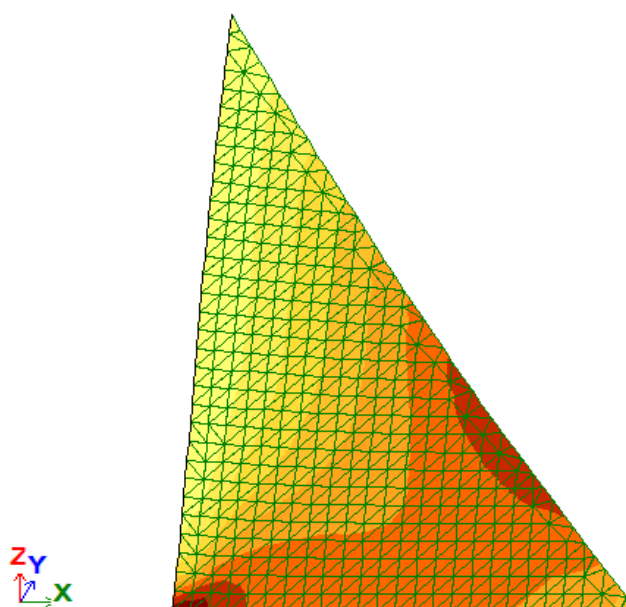
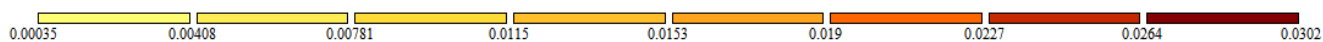


Рис. 4. Изополя напряжений σ_x , полученные в ПК ЛИРА



Рис. 5. Изополя напряжений σ_z , полученные в ПК ЛИРАРис. 6. Изополя напряжений τ_{xz} , полученные в ПК ЛИРА

Для сравнения результатов с аналитическим решением были построены эпюры напряжений в сечении $z = 3.2$ м (рис. 7–9).



Рис. 7. Эпюра напряжений σ_x при $z = 3.2$ м (в заземлении), полученная в ПК ЛИРА

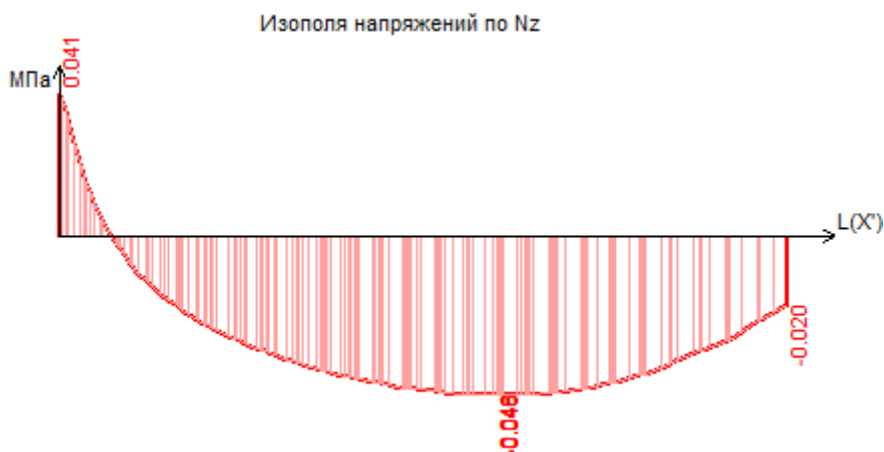


Рис. 8. Эпюра напряжений σ_z при $z = 3.2$ м (в заземлении), полученная в ПК ЛИРА

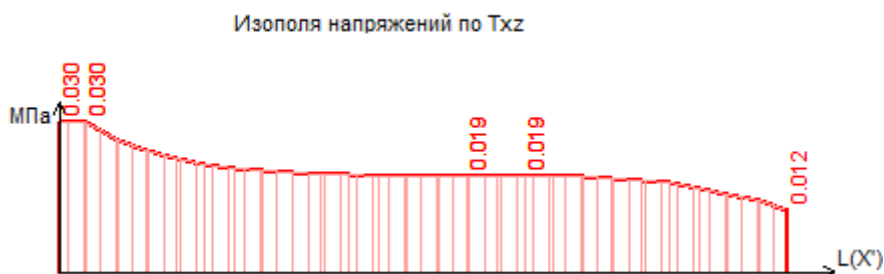


Рис. 9. Эпюра напряжений τ_{xz} при $z = 3.2$ м (в заземлении), полученная в ПК ЛИРА

На рисунках 7–9 видно существенное расхождение результатов с аналитическим решением. Отличаются не только максимальные величины напряжений, но и характер эпюр. Это связано с тем, что при определении постоянных A, B, C, D в функции (2) не учитываются граничные условия на стороне AB .

В то же время в точках, достаточно удаленных от опорной зоны, решение методами классической теории упругости достаточно хорошо описывает напряженно-деформированное состояние плотины. На рис. 10–12 приведены эпюры напряжений в сечении $z = 1.6$ м, полученные в программном комплексе ЛИРА. На рис. 13 показано распределение напряжений в том же сечении в соответствии с аналитическим решением.

Изополю напряжений по N_x

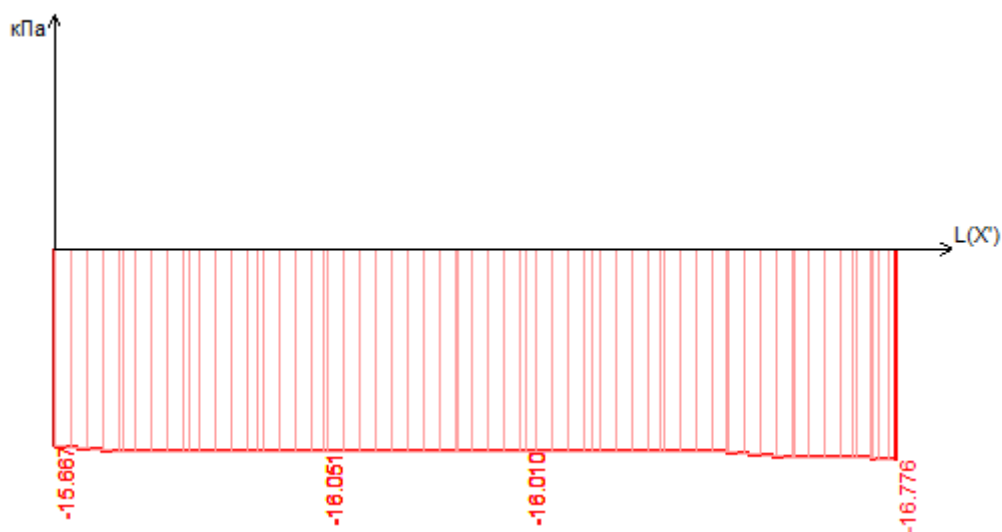


Рис. 10. Эпюра напряжений σ_x при $z = 1.6$ м, полученная в ПК ЛИРА

Изополю напряжений по N_z

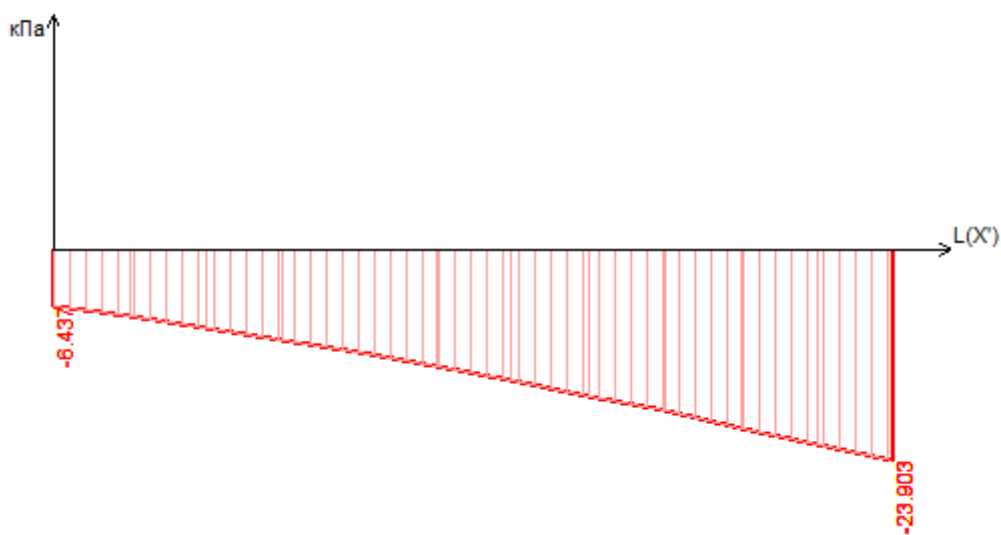


Рис. 11. Эпюра напряжений σ_z при $z = 1.6$ м, полученная в ПК ЛИРА

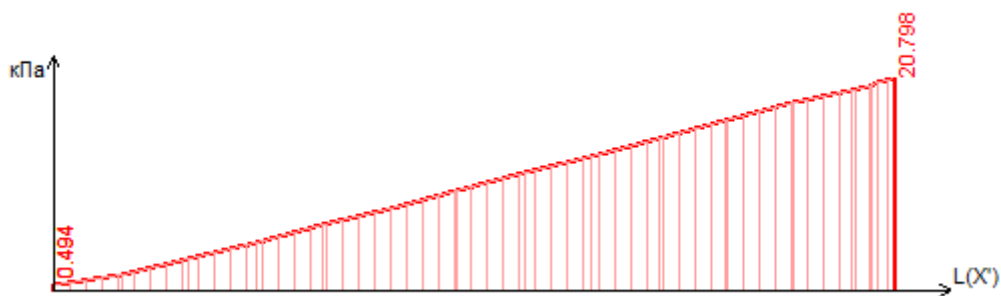


Рис. 12. Эпюра напряжений τ_{xz} при $z = 1.6$ м, полученная в ПК ЛИРА

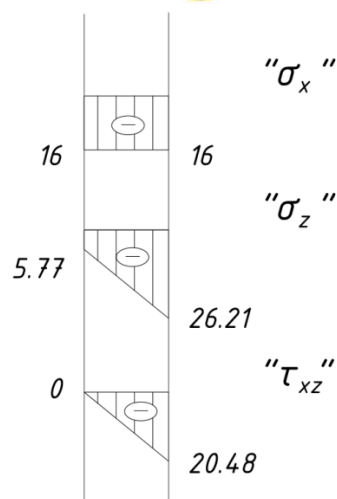


Рис. 13. Эпюры напряжений в кПа для сечения $z = 1.6$ м, полученные аналитически

Выводы. Изучив представленные графики, можно сделать вывод, что аналитическое решение на основе классической теории упругости достаточно хорошо описывает напряженно-деформированное состояние конструкции в точках, весьма удаленных от опорной зоны. Наиболее опасной является приопорная зона, в которой наблюдается существенное расхождение между результатами численного и аналитического решения. Таким образом, при расчете и проектировании плотин вместо аналитических методов следует применять современные МКЭ комплексы.

Библиографический список

1. Напряженно–деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона / Б. М. Языев [и др.] // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 3. — С. 759–763.
2. Дудник, А. Е. Плоская осесимметричная задача термовязкоупругости для полимерного цилиндра / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, Н. И. Никора [Электронный ресурс] / Инженерный вестник Дона. — Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2816> (дата обращения: 02.08.18).
3. Построение модели равнопрочного толстостенного цилиндра при силовых и температурных воздействиях / Б. М. Языев [и др.] // Научное обозрение. — 2014. — № 9, ч. 3. — С. 863–866.
4. Потери предварительного напряжения в железобетонном цилиндре за счет ползучести бетона / Б. М. Языев [и др.] // Научное обозрение. — 2014. — № 11, ч. 2. — С. 445–449.
5. Mailyan, L.R. Calculation of prestressed concrete cylinder considering creep of concrete / L.R. Mailyan, A.S. Chepurnenko, A. Ivanov // Procedia Engineering. — 2016. — Vol.165. — P. 1853-1857.
6. Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя / Б. М. Языев [и др.] // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. — 2014. — № 2 (33). — С. 47–55.
7. Расчет трехслойной полой оболочки с учетом ползучести среднего слоя / В. И. Андреев [и др.] // Вестник МГСУ. — 2015. — № 7. — С. 17–24.



8. Chepurnenko, A.S. Calculation of the Three-layer Shell Taking into Account Creep / A.S. Chepurnenko, L.R. Mailyan, B.M. Jazyev // *Procedia Engineering*. — 2016. — Vol. 165. — P.990 – 994.
9. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости / А. Е. Дудник [и др.] // *Инженерный вестник Дона*. — 2015. — № 2, ч.2. — Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063> (дата обращения: 02.08.18).
10. Чепурненко, А. С. Конечно-элементное моделирование ползучести трехслойной пластины / А. С. Чепурненко, В. С. Чепурненко, А. А. Савченко // *Молодой исследователь Дона*. — 2017. — № 3 (6). — С. 95–102.
11. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности. Учеб. пособие / В. И. Самуль. — 2-е изд. — Москва : Высшая школа, 1982. — 264 с.