



УДК 539. 3

UDC 539. 3

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ-ПОЛОСЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ*Д. Б. Демченко¹, И. А. Маяцкая²,
А. И. Полисмаков³*

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Спорт-Инжиниринг», Москва, Российская Федерация
denis2711@yandex1.ru

^{2,3}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

irina.mayatskaya@mail.ru
polis_1947@mail.ru

Целью работы является решение задач цилиндрического изгиба с помощью метода конечных разностей. Изучена система линейных алгебраических уравнений относительно значений функции прогиба балки-полосы в узлах сетки. Найдены значения прогибов в узлах сетки и значения изгибающего момента, который зависит от жесткости балки-полосы при изгибе, ее ширины и коэффициента постели. В работе рассмотрены два случая нагрузки (равномерная по всей площади и по краям) и два вида закрепления (жесткая опора по краям и со свободными краями).

Ключевые слова: упругая балка-полоса, изгиб, упругое основание, метод конечных разностей, метод сеток.

Введение. Расчету конструкций, лежащих на упругом основании, посвящено множество научных работ [1–3]. Современные методы исследования при проектировании фундаментных плит и дорожных покрытий основаны как на численных методах расчета, так и на аналитических методах [4–10]. Проблемам, связанным с применением метода конечных разностей к задачам линейной теории упругости, расчету пластин и оболочек посвятили труды многие ученые: А. В. Александров, Н. П. Абровский, М. А. Колтунов, С. П. Тимошенко, П. М. Варвак [10–12]. Большим преимуществом метода конечных разностей является слабая зависимость от граничных условий и характера исходного напряженного состояния [13–15]. Недостатком является высокий порядок систем алгебраических уравнений, однако современные программные комплексы данный

NUMERICAL REALIZATION OF BENDING PROBLEM FOR THE BEAM-STRIP ON AN ELASTIC FOUNDATION USING THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES*D. B. Demchenko¹, I. A. Mayatskaya²,
A. I. Polismakov³*

¹Federal State Unitary Enterprise "Sports Engineering", Moscow, Russian Federation
denis2711@yandex1.ru

^{2,3}Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

irina.mayatskaya@mail.ru
polis_1947@mail.ru

The purpose of this work is the numerical solution of the cylindrical bending tasks using the finite difference method. The system of linear algebraic equations for the values of the function of the beam-strip deflection in the mesh nodes was studied. The authors have found the bending values at the mesh points as well as the bending moment, which depends on the hardness of the beam-strip in bending, its width and coefficient of subgrade resistance. The paper considers two cases of loading (uniform over the entire area and at the edges) and two types of fixing (rigid bearing beam-strip at the edges and with the free edges)

Keywords: elastic beam-strip, bending, elastic foundation, finite difference method, grid method.

недостаток устраняют. Подобные задачи возникают при проектировании плитных фундаментов, полов сооружений, аэродромных и дорожных покрытий [16]. Конструирование строительных сооружений, в которых встречается изгиб балки-полосы на упругом основании, представляет большой практический интерес.

1. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной балки-полосы, жестко опертой по краям, опирающейся всей поверхностью на упругое основание.

Вырезав из пластины балку-полосу, будем рассматривать ее как балку на упругом основании. При этом будем полагать, что балка-полоса уложена на постель из материала, способного сопротивляться как силам, действующим вниз, так и силам, действующим вверх.

Проанализируем изгиб длинной прямоугольной пластины, равномерно нагруженной, опирающейся всей своей поверхностью на упругое основание и жестко опертой по краям (рис. 1).

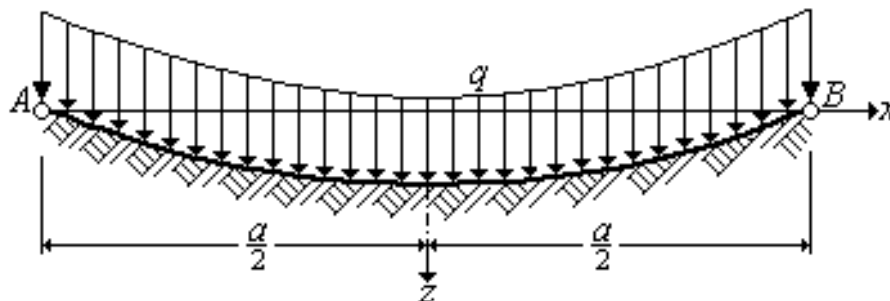


Рис. 1. Прямоугольная балка-полоса на упругом основании, равномерно нагруженная по всей длине и жестко опертая по краям

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw. \quad (1.1)$$

Предварительно получим формулы, позволяющие заменить производные функции w отношением конечных величин. Воспользуемся формулой Тейлора для определения приближенного выражения производных функции $w = w(x)$ в произвольной точке m балки-полосы (рис. 2).

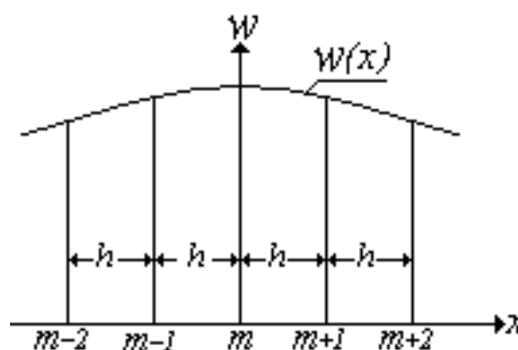


Рис. 2. Схема разбиения функции прогиба балки-полосы

Точку m будем называть центральной, соседние точки будем считать равноотстоящими. Воспользуемся формулой Тейлора и ограничимся удержанием только первых трех членов:

$$w_{m+1} \approx w_m + h \cdot w'_m + \frac{h^2}{2} \cdot w''_m; \tag{1.2}$$

$$w_{m-1} \approx w_m - h \cdot w'_m + \frac{h^2}{2} \cdot w''_m.$$

Вычитая и складывая, получим:

$$w_{m+1} - w_{m-1} \approx 2h \cdot w'_m; \tag{1.3}$$

$$w_{m+1} + w_{m-1} \approx 2w_m + h^2 \cdot w''_m.$$

Отсюда:

$$w'_m \approx \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2h}; \tag{1.4}$$

$$w''_m \approx \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{h^2}. \tag{1.5}$$

Взяв первую производную, согласно (1.4), от второй производной (1.5), получим:

$$w'''_m \approx \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2h^3}. \tag{1.6}$$

Еще раз дифференцируя (1.6), получим:

$$w''''_m \approx \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{h^4}. \tag{1.7}$$

Выделим элементарную балку-полосу и разобьем ее на равные конечно-разностные отрезки размером:

$$h = \Delta_x = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{2n}, \tag{1.8}$$

где a — ширина балки-полосы; n — число разбиений на половине длины балки-полосы.

Нумерация отрезков, с учетом симметрии, изображена на рис. 3.

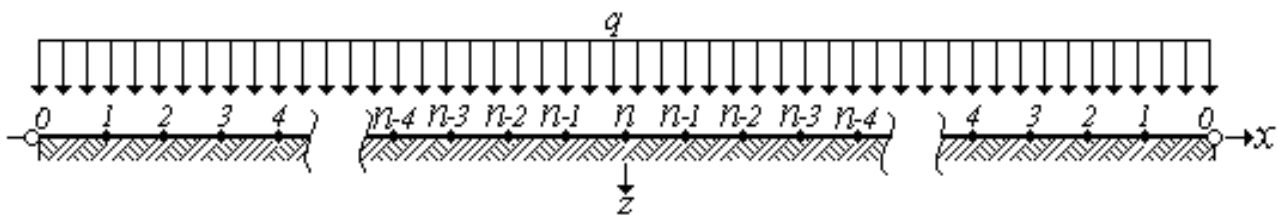


Рис. 3. Нумерация отрезков балки-полосы на упругом основании, равномерно нагруженной и жестко опертой по краям, с учетом симметрии

Четвертая производная в форме метода конечных разностей для произвольной точки m балки-полосы:

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_m = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta_x^4}. \tag{1.9}$$

Подставив в уравнение (1.1), получим для произвольной точки m балки-полосы:

$$\frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta_x^4} + \frac{k}{D} w_m = \frac{q_m}{D} \tag{1.10}$$

или

$$w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2} + \frac{k\Delta_x^4}{D} w_m = \frac{q_m\Delta_x^4}{D}, \text{ где } m=1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.11)$$

Обозначим:

$$\alpha = \frac{k\Delta_x^4}{D}; \quad \delta_m = \frac{q_m\Delta_x^4}{D}. \quad (1.12)$$

Тогда конечно-разностные уравнения (1.11) принимают вид:

$$w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2} + \alpha \cdot w_m = \delta_m. \quad (1.13)$$

Граничные условия для шарнирного закрепления продольных граней балки-полосы имеют вид: $x = \pm \frac{a}{2}$; $w = 0$; $M_x = 0$. Из условия $M_x = 0$ следует, что $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$. В форме метода конечных разностей данное условие принимает вид $w_{-1} = -w_1$. Составив конечно-разностные уравнения (1.13) для каждого внутреннего узла балки-полосы, с учетом граничных условий, получим систему линейных алгебраических уравнений порядка $n \times n$ для определения прогибов w_m :

$$\left. \begin{aligned} (5 + \alpha)w_1 - 4w_2 + w_3 + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + \dots + 0 \cdot w_{n-3} + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_1; \\ -4w_1 + (6 + \alpha)w_2 - 4w_3 + w_4 + 0 \cdot w_5 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_2; \\ w_1 - 4w_2 + (6 + \alpha)w_3 - 4w_4 + w_5 + 0 \cdot w_6 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_3; \\ 0 \cdot w_1 + w_2 - 4w_3 + (6 + \alpha)w_4 - 4w_5 + w_6 + 0 \cdot w_7 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_4; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 - 4w_4 + (6 + \alpha)w_5 - 4w_6 + w_7 + 0 \cdot w_8 + \dots + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_5; \\ \dots & \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_{n-6} + w_{n-5} - 4w_{n-4} + (6 + \alpha)w_{n-3} - 4w_{n-2} + w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_{n-3}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-5} + w_{n-4} - 4w_{n-3} + (6 + \alpha)w_{n-2} - 4w_{n-1} + w_n &= \delta_{n-2}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-4} + w_{n-3} - 4w_{n-2} + (7 + \alpha)w_{n-1} - 4w_n &= \delta_{n-1}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-3} + 2w_{n-2} - 8w_{n-1} + (6 + \alpha)w_n &= \delta_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид: $A \cdot W = B$, где A — матрица коэффициентов системы уравнений (1.14); W — столбец прогибов; B — столбец свободных членов системы уравнений (1.14). Матрица A имеет вид:



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \dots & a_{5,n-2} & a_{5,n-1} & a_{5,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-3,1} & a_{n-3,2} & a_{n-3,3} & a_{n-3,4} & \dots & a_{n-3,n-2} & a_{n-3,n-1} & a_{n-3,n} \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & a_{n-2,4} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Значения коэффициентов a_{ij} равны:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= (5 + \alpha); \quad a_{12} = -4; \quad a_{13} = 1; \quad a_{14} = 0; \quad \dots \quad a_{1n} = 0; \\ a_{21} &= -4; \quad a_{22} = (6 + \alpha); \quad a_{23} = -4; \quad a_{24} = 1; \quad a_{25} = 0; \quad \dots \quad a_{2n} = 0; \\ &\dots \\ a_{n-1,1} &= 0; \quad a_{n-1,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n-1,n-4} = 0; \quad a_{n-1,n-3} = 1; \quad a_{n-1,n-2} = -4; \\ a_{n-1,n-1} &= (7 + \alpha); \quad a_{n-1,n} = -4; \\ a_{n,1} &= 0; \quad a_{n,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n,n-3} = 0; \quad a_{n,n-2} = 2; \quad a_{n,n-1} = -8; \quad a_{n,n} = (6 + \alpha). \end{aligned} \right\} \tag{1.16}$$

Столбцы W и B имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W^T &= \|w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad \dots \quad w_{n-2} \quad w_{n-1} \quad w_n\|; \\ B^T &= \frac{1}{D} \|\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \dots \quad \delta_{n-2} \quad \delta_{n-1} \quad \delta_n\|. \end{aligned} \right\} \tag{1.17}$$

Решив данную систему уравнений, определим значения прогибов в фиксированных точках (узлах) балки-полосы: $W = \frac{1}{D} A^{-1} \cdot B$. Выражение изгибающего момента для цилиндрического

изгиба пластины имеет вид: $M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$.

Вторая производная в форме метода конечных разностей для фиксированной точки m балки-полосы примет вид:

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_m = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta^2}. \tag{1.18}$$

Выражение для изгибающего момента в фиксированных точках m балки-полосы:



$$M_{x(m)} = -D \cdot \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta^2}. \quad (1.19)$$

Численные значения изгибающих моментов представлены на рис. 4. Введены безразмерные параметры $\xi = x_0/a$ и $\beta = \frac{a}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}$, где k — реакция основания на единицу площади при прогибе, равном единице (коэффициент постели); D — жесткость при изгибе (цилиндрическая жесткость). До значения $\beta < 1,575$ изгибающий момент принимает экстремальное (максимальное) значение только в центре балки-полосы ($x = 0$). Значения безразмерного параметра ξ зависят от β .

Таблица 1

Значения параметра β

β	ξ	β	ξ	β	ξ
<1,57	0,00	2,36	0,33573	3,18	0,37770
1,58	0,05408	2,40	0,33895	3,22	0,37917
1,60	0,09624	2,42	0,34047	3,24	0,37979
1,62	0,12321	2,44	0,34195	3,26	0,38054
1,64	0,14422	2,46	0,34338	3,28	0,38118
1,66	0,16157	2,48	0,34477	3,30	0,38188
1,68	0,17639	2,50	0,34613	3,32	0,38247
1,70	0,18935	2,52	0,34741	3,34	0,38316
1,72	0,20083	2,54	0,34868	3,36	0,38382
1,74	0,21116	2,56	0,34990	3,38	0,38446
1,76	0,22050	2,58	0,35110	3,40	0,38509
1,78	0,22908	2,60	0,35230	3,42	0,38572
1,80	0,23686	2,62	0,35344	3,44	0,38635
1,82	0,24419	2,64	0,35455	3,46	0,38697
1,84	0,25087	2,66	0,35564	3,48	0,38758
1,86	0,25707	2,68	0,35670	3,50	0,38813
1,88	0,26283	2,70	0,35770	3,52	0,38878
1,90	0,26819	2,72	0,35874	3,54	0,38938
1,92	0,27322	2,74	0,35974	3,56	0,39002
1,94	0,27792	2,76	0,36071	3,58	0,39059
1,96	0,28233	2,78	0,36166	3,60	0,39112
1,98	0,28649	2,80	0,36258	3,62	0,39172
2,00	0,29043	2,82	0,36351	3,64	0,39228
2,02	0,29410	2,84	0,36442	3,66	0,39284
2,04	0,29760	2,86	0,36530	3,68	0,39340
2,06	0,30090	2,88	0,36618	3,70	0,39396
2,08	0,30404	2,90	0,36700	3,72	0,39452
2,10	0,30710	2,92	0,36791	3,74	0,39507
2,12	0,30995	2,94	0,36868	3,76	0,39560

2,14	0,31266	2,96	0,36949	3,78	0,39615
2,16	0,31524	2,98	0,37029	3,80	0,39667
2,18	0,31770	3,00	0,37101	3,82	0,39720
2,20	0,32005	3,02	0,37186	3,84	0,39772
2,22	0,32231	3,04	0,37262	3,86	0,39824
2,24	0,32447	3,06	0,37337	3,88	0,39876
2,26	0,32654	3,08	0,37410	3,90	0,39927
2,28	0,32852	3,10	0,37488	3,92	0,39978
2,30	0,33043	3,12	0,37562	3,925	0,39990

При значениях $1,575 \leq \beta \leq 3,927$ изгибающие моменты достигают экстремальных значений в трех сечениях: в центре — минимум, а в двух, симметрично расположенных относительно центра, — максимум.

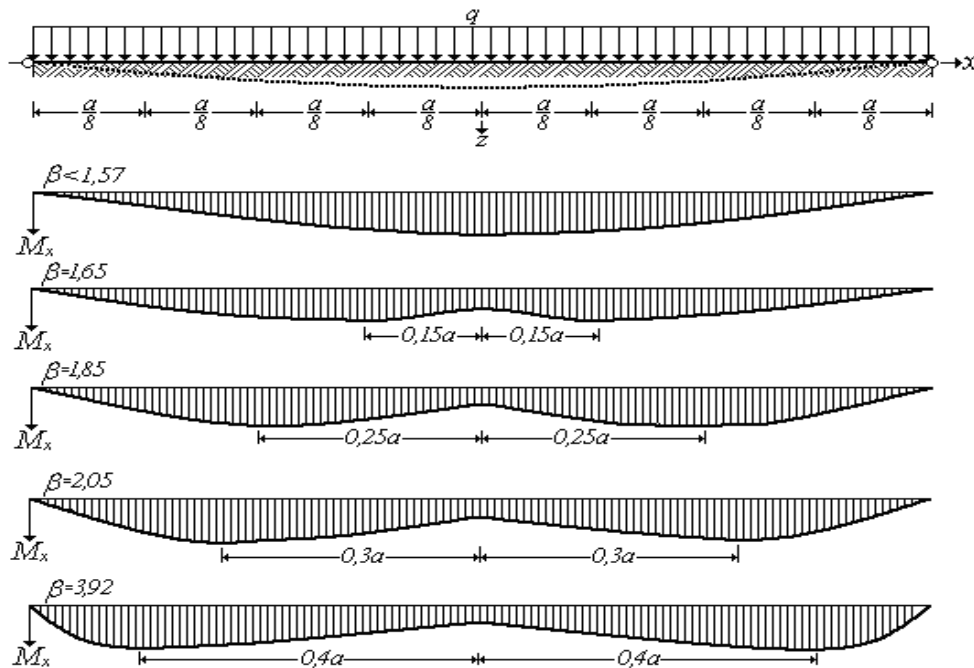


Рис. 4. Эпюры изгибающего момента M_x для значений β балки-полосы на упругом основании, нагруженной равномерно распределенными по ее краям нагрузками и свободно опертой по краям

2. Цилиндрический изгиб балки-полосы, вдавливаемой в упругое основание равномерно распределенными по ее краям нагрузками.

Длинная прямоугольная балка-полоса вдавливается в упругое основание равномерно распределенными по ее краям нагрузками (величиной F на единицу длины) (рис. 5). Прогиб на краях балки-полосы обозначим через λ , тогда реакция основания в произвольной точке будет равна:

$$k(\lambda - w) = k\lambda - kw. \tag{2.1}$$

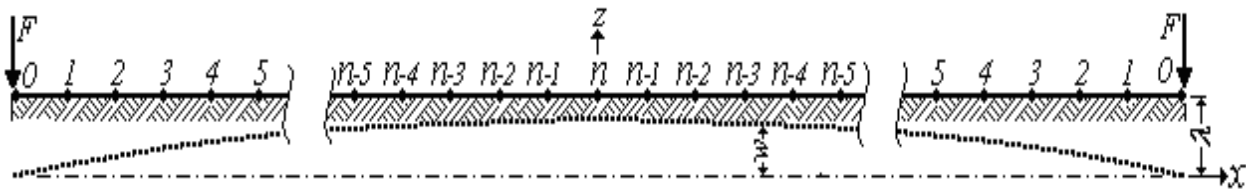


Рис. 5. Нумерация отрезков балки-полосы на упругом основании, вдавливаемой в упругое основание равномерно распределенными по ее краям нагрузками, с учетом симметрии

Исходное дифференциальное уравнение (1.1) в этом случае принимает вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = k \cdot \lambda - k \cdot w. \tag{2.2}$$

Величину λ (рис. 4) определим из условия, что нагрузка уравнивается реакцией основания, т. е.:

$$F = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2} - k \int_0^{a/2} w dx. \tag{2.3}$$

Входящий в выражение (2.3) интеграл вычислим, используя правило Симпсона:

$$F = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2} - k \frac{\Delta x}{3} \left[\begin{aligned} &4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ &+ 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{aligned} \right]. \tag{2.4}$$

Отсюда:

$$\lambda = \frac{2F}{k \cdot a} + \frac{2\Delta x}{3a} \left[\begin{aligned} &4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ &+ 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{aligned} \right]. \tag{2.5}$$

Подставив полученное значение λ в выражение (2.2), получим:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{k}{D} w = \frac{2F}{Da} + k \frac{2\Delta x}{3Da} \left[\begin{aligned} &4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ &+ 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{aligned} \right]. \tag{2.6}$$

В форме метода конечных разностей это выражение имеет следующий вид:



$$w_{m+2} - 4w_{m+1} + (6 + \alpha)w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2} - \gamma \left(\begin{array}{l} 4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + \\ + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ + 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + \\ + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{array} \right) = \delta_m, \quad (2.7)$$

где

$$\alpha = \frac{k \cdot \Delta_x^4}{D}; \quad \gamma = \frac{2k \cdot \Delta_x^5}{3D \cdot a}; \quad \delta_m = \frac{2F \cdot \Delta_x^4}{D \cdot a}; \quad m = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.8)$$

Граничные условия имеют вид: $x = \pm \frac{a}{2}$. $w = 0$; $M_x = 0$. $\rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = 0$.

В форме метода конечных разностей эти условия могут быть представлены в виде: $w_0 = 0$; $w_{-1} = -w_1$. Запишем выражение (2.7) для первого узла:

$$w_3 - 4w_2 + (6 + \alpha)w_1 - 4w_0 + w_{-1} - \gamma \left(\begin{array}{l} 4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + \\ + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ + 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + \\ + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{array} \right) = \delta_1 \quad (2.9)$$

или

$$(5 + \alpha - 4\gamma)w_1 - (4 + 2\gamma)w_2 + (1 - 4\gamma)w_3 - 2\gamma w_4 - 4\gamma w_5 - 2\gamma w_6 - 4\gamma w_7 - 2\gamma w_8 - 4\gamma w_9 - 2\gamma w_{10} - \dots - 4\gamma w_{n-5} - 2\gamma w_{n-4} - 4\gamma w_{n-3} - 2\gamma w_{n-2} - 4\gamma w_{n-1} - \gamma w_n = \delta_1. \quad (2.10)$$

Составляя выражение (2.7) для остальных узлов, получим:

$$w_{n+2} - 4w_{n+1} + (6 + \alpha)w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2} - \gamma \left(\begin{array}{l} 4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + \\ + 2w_6 + 4w_7 + 2w_8 + 4w_9 + \\ + 2w_{10} + \dots + 4w_{n-5} + 2w_{n-4} + \\ + 4w_{n-3} + 2w_{n-2} + 4w_{n-1} + w_n \end{array} \right) = \delta_n \quad (2.11)$$

или

$$-4\gamma w_1 - 2\gamma w_2 - 4\gamma w_3 - 2\gamma w_4 - 4\gamma w_5 - 2\gamma w_6 - 4\gamma w_7 - 2\gamma w_8 - 4\gamma w_9 - 2\gamma w_{10} - 4\gamma w_{n-5} - 2\gamma w_{n-4} - 4\gamma w_{n-3} + 2(1 - \gamma)w_{n-2} - (8 + 4\gamma)w_{n-1} + (6 + \alpha - \gamma)w_n = \delta_n. \quad (2.12)$$

В матричной форме эти уравнения имеют такой же вид, как и в первой задаче, но значения коэффициентов a_{ij} изменятся:

$$\left. \begin{aligned}
 &a_{11} = (5 + \alpha - 4\gamma); \quad a_{12} = -(4 + 2\gamma); \quad a_{13} = (1 - 4\gamma); \quad a_{14} = -2\gamma; \\
 &a_{15} = -4\gamma; \quad a_{16} = -2\gamma; \quad a_{17} = -4\gamma; \quad a_{18} = -2\gamma; \quad a_{1,9} = -4\gamma; \quad a_{1,10} = -2\gamma; \\
 &a_{1,n-5} = -4\gamma; \quad a_{1,n-4} = -2\gamma; \quad a_{1,n-3} = -4\gamma; \quad a_{1,n-2} = -2\gamma; \quad a_{1,n-1} = -4\gamma; \quad a_{1,n} = -\gamma. \\
 &a_{n-1,1} = -4\gamma; \quad a_{n-1,2} = -2\gamma; \quad a_{n-1,3} = -4\gamma; \quad a_{n-1,4} = -2\gamma; \quad a_{n-1,5} = -4\gamma; \\
 &a_{n-1,6} = -2\gamma; \quad a_{n-1,7} = -4\gamma; \quad a_{n-1,8} = -2\gamma; \quad a_{n-1,9} = -4\gamma; \quad a_{n-1,10} = -2\gamma; \\
 &a_{n-1,n-5} = -4\gamma; \quad a_{n-1,n-4} = -2\gamma; \quad a_{n-1,n-3} = (1 - 4\gamma); \quad a_{n-1,n-2} = -4(1 + 2\gamma); \\
 &a_{n-1,n-1} = (7 + \alpha - 4\gamma); \quad a_{n-1,n} = -4(1 + \gamma). \\
 \\
 &a_{n1} = -4\gamma; \quad a_{n2} = -2\gamma; \quad a_{n3} = -4\gamma; \quad a_{n4} = -2\gamma; \quad a_{n5} = -4\gamma; \quad a_{n6} = -2\gamma; \\
 &a_{n7} = -4\gamma; \quad a_{n8} = -2\gamma; \quad a_{n,9} = -4\gamma; \quad a_{n,10} = -2\gamma; \quad \dots \quad a_{n,n-5} = -4\gamma; \\
 &a_{n,n-4} = -2\gamma; \quad a_{n,n-3} = -4\gamma; \quad a_{n,n-2} = (1 - \gamma); \quad a_{nn-1} = -(8 + 4\gamma); \quad a_{nn} = (6 + \alpha - \gamma).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Решив данную систему уравнений, определим значения прогибов в фиксированных точках (узлах) балки-полосы и изгибающий момент в фиксированных точках m балки-полосы по формулам: $W = \frac{1}{D} A^{-1} \cdot B$ и $M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$. Эпюры изгибающего момента M_x для некоторых значений β продемонстрированы на рис. 6.

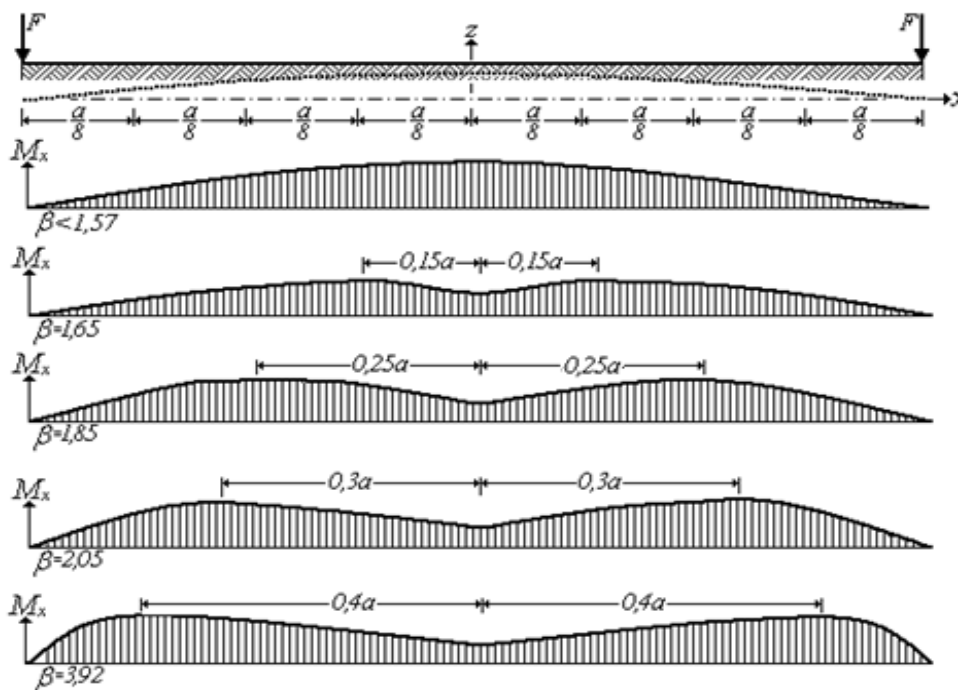


Рис. 6. Эпюры изгибающего момента M_x для значений β прямоугольной балки-полосы на упругом основании, нагруженной равномерно распределенными по ее краям нагрузками и свободно опертой по краям

3. Цилиндрический изгиб балки-полосы, вдавливаемой в упругое основание равномерно распределенной по всей ее поверхности нагрузкой.

Длинная прямоугольная балка-полоса вдавливается в упругое основание равномерно распределенной по всей ее поверхности нагрузкой (рис. 7).

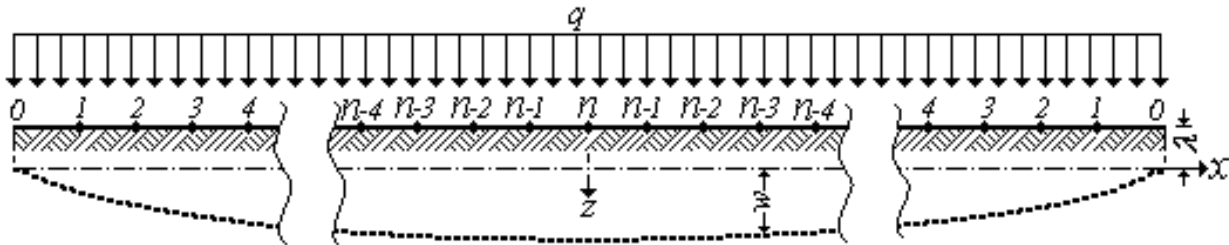


Рис. 7. Нумерация отрезков балки-полосы на упругом основании, вдавливаемой в упругое основание равномерно распределенной по всей ее поверхности нагрузкой, с учетом симметрии

Если прогиб на краях пластины обозначить через λ , то реакция основания в произвольной точке будет равна:

$$k(\lambda + w) = k\lambda + kw. \tag{3.1}$$

Исходное дифференциальное уравнение (1.1) в этом случае принимает вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = k \cdot \lambda + k \cdot w. \tag{3.2}$$

Величина λ находится из условия, что нагрузка уравнивается реакцией основания, т. е.:

$$q \frac{a}{2} = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2} + k \int_0^{a/2} w dx, \text{ отсюда } \lambda = \frac{q}{k} - \frac{2}{a} \int_0^{a/2} w \cdot dx. \tag{3.3}$$

При принятой системе координат (рис. 5) дифференциальное уравнение изгиба балки-полосы имеет вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw. \tag{3.4}$$

Выделим элементарную балку-полосу и разобьем ее на равные конечно-разностные отрезки размером:

$$h = \Delta_x = \frac{a}{2n} = \frac{a}{2n}, \tag{3.4}$$

где a — ширина балки-полосы; n — число разбиений на половине длины балки-полосы.

Нумерация отрезков, с учетом симметрии, приведена на рис. 7.

Четвертая производная в форме метода конечных разностей для произвольной точки m балки-полосы:

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_m = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta_x^4}. \tag{3.5}$$

Подставив в уравнение (3.4), получим для произвольной точки m балки-полосы:

$$\frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta_x^4} + \frac{k}{D} w_m = \frac{q_m}{D} \tag{3.6}$$

или

$$w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2} + \frac{k\Delta_x^4}{D} w_m = \frac{q_m \Delta_x^4}{D}, \tag{3.7}$$



где $m=1, 2, 3, \dots, n$.

Обозначим:

$$\alpha = \frac{k\Delta_x^4}{D}; \quad \delta_m = \frac{q_m\Delta_x^4}{D}. \quad (3.8)$$

Тогда конечно-разностное уравнение (3.7) принимает вид:

$$w_{m+2} - 4w_{m+1} + (6 + \alpha)w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2} = \delta_m. \quad (3.9)$$

Граничные условия на продольных гранях балки-полосы: $x = \pm \frac{a}{2}; \quad w = 0; \quad M_x = 0$.

Из условия $M_x = 0$ следует, что $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$.

В форме метода конечных разностей данное условие принимает вид:

$$w_{-1} = -w_1. \quad (3.10)$$

Составив конечно-разностные уравнения (3.9) для каждого внутреннего узла балки-полосы, с учетом граничных условий, получим систему линейных алгебраических уравнений порядка $n \times n$ для определения прогибов w_m :

$$\left. \begin{aligned} (5 + \alpha)w_1 - 4w_2 + w_3 + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + \dots + 0 \cdot w_{n-3} + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_1; \\ -4w_1 + (6 + \alpha)w_2 - 4w_3 + w_4 + 0 \cdot w_5 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_2; \\ w_1 - 4w_2 + (6 + \alpha)w_3 - 4w_4 + w_5 + 0 \cdot w_6 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_3; \\ 0 \cdot w_1 + w_2 - 4w_3 + (6 + \alpha)w_4 - 4w_5 + w_6 + 0 \cdot w_7 + \dots + 0 \cdot w_{n-2} + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_4; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 - 4w_4 + (6 + \alpha)w_5 - 4w_6 + w_7 + 0 \cdot w_8 + \dots + 0 \cdot w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_5; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_{n-6} + w_{n-5} - 4w_{n-4} + (6 + \alpha)w_{n-3} - 4w_{n-2} + w_{n-1} + 0 \cdot w_n &= \delta_{n-3}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-5} + w_{n-4} - 4w_{n-3} + (6 + \alpha)w_{n-2} - 4w_{n-1} + w_n &= \delta_{n-2}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-4} + w_{n-3} - 4w_{n-2} + (7 + \alpha)w_{n-1} - 4w_n &= \delta_{n-1}; \\ 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_{n-3} + 2w_{n-2} - 8w_{n-1} + (6 + \alpha)w_n &= \delta_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид: $A \cdot W = B$, где столбцы W и B описываются выражением (1.17), а значения коэффициентов матрицы A изменяются. Решив систему уравнений,

определим значения прогибов в фиксированных точках (узлах) балки-полосы. Коэффициенты матрицы A равны:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} = (5 + \alpha); \quad a_{12} = -4; \quad a_{13} = 1; \quad a_{14} = 0; \quad \dots \quad a_{1n} = 0; \\
 & a_{21} = -4; \quad a_{22} = (6 + \alpha); \quad a_{23} = -4; \quad a_{24} = 1; \quad a_{25} = 0; \quad \dots \quad a_{2n} = 0; \\
 & a_{31} = 1; \quad a_{32} = -4; \quad a_{33} = (6 + \alpha); \quad a_{34} = -4; \quad a_{35} = 1; \quad a_{36} = 0; \dots \quad a_{3n} = 0; \\
 & a_{41} = 0; \quad a_{42} = 1; \quad a_{43} = -4; \quad a_{44} = (6 + \alpha); \quad a_{45} = -4; \quad a_{46} = 1; \\
 & a_{47} = 0; \dots a_{4n} = 0; \\
 & a_{51} = 0; \quad a_{52} = 0; \quad a_{53} = 1; \quad a_{54} = -4; \quad a_{55} = (6 + \alpha); \quad a_{56} = -4; \quad a_{57} = 1; \\
 & a_{58} = 0; \dots a_{5n} = 0; \\
 & a_{n-3,1} = 0; \quad a_{n-3,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n-3,n-6} = 0; \quad a_{n-3,n-5} = 1; \quad a_{n-3,n-4} = -4; \\
 & a_{n-3,n-3} = (6 + \alpha); \quad a_{n-3,n-2} = -4; \quad a_{n-3,n-1} = 1; \quad a_{n-3,n} = 0; \\
 & a_{n-2,1} = 0; \quad a_{n-2,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n-2,n-5} = 0; \quad a_{n-2,n-4} = 1; \quad a_{n-2,n-3} = -4; \\
 & a_{n-2,n-2} = (6 + \alpha); \quad a_{n-2,n-1} = -4; \quad a_{n-2,n} = 1; \\
 & a_{n-1,1} = 0; \quad a_{n-1,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n-1,n-4} = 0; \quad a_{n-1,n-3} = 1; \quad a_{n-1,n-2} = -4; \\
 & a_{n-1,n-1} = (7 + \alpha); \quad a_{n-1,n} = -4; \\
 & a_{n,1} = 0; \quad a_{n,2} = 0; \quad \dots \quad a_{n,n-3} = 0; \quad a_{n,n-2} = 2; \quad a_{n,n-1} = -8; \quad a_{n,n} = (6 + \alpha).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Полный прогиб равен:

$$W_{\text{полн}} = W + \lambda. \tag{3.13}$$

Вторая производная в форме метода конечных разностей для точки m балки-полосы определяется по формуле (1.18).

Изгибающий момент в фиксированных точках m балки-полосы определяется выражением (1.19), однако численные значения изгибающего момента и прогиба имеет другие значения в точках, так как коэффициенты матрицы A изменяются.

Заключение. При сравнении результатов численного и аналитического решения первой задачи для балки-полосы с разбиением на 20 участков было установлено, что расхождение составляет: для прогиба — 0,2%, для изгибающего момента — 4,5%. В тех же пределах определено расхождение для второй и третьей задачи. Авторами впервые было реализовано численное решение для цилиндрического изгиба балки-полосы на упругом основании методом конечных разностей применительно к двум случаям ее закрепления и нагружения. Получены формулы для численного решения вышеупомянутых задач для прогиба и изгибающего момента.

Библиографический список.

1. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. — Москва : Физматгиз, 1960. — 491 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликов, В. И. Соломин. — Москва : Стройиздат, 1984. — 679 с.
3. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. — Москва : Госстройиздат, 1962. — 240 с.
4. Краснобаев, И. А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин / И. А. Краснобаев, И. А. Маяцкая. — Ростов-на-Дону : Рост. гос. строит. ун-т, 2011. — 87 с.



5. Теория пластин и оболочек / И. А. Краснобаев [и др.] ; под. ред. И. А. Краснобаева. — Ростов-на-Дону : Рост. гос. строит. ун-т, 2012. — 114 с.
6. Барменкова, Е. В. Расчет системы «здание — фундамент — основание» с использованием модели двухслойной балки на упругом основании винклеровского типа [Электронный ресурс] / Е. В. Барменкова. — Москва : НИУ МГСУ, 2015. — 1 электрон. опт. диск (CD).
7. Андреев, В. И. Об изгибе составной балки на упругом основании / В. И. Андреев, Е. В. Барменкова // Фундаментальные исследования РААСН в 2009 г. — 2010. — Т. 2. — С. 74–79
8. Andreev, V. I. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep / V. I. Andreev, B. M. Yazyev, A.S. Chepurnenko // Advanced Materials Research, 2014 Vol. 900 pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.
9. Andreev, V. I. The calculation of the two-layer beam model on an elastic basis with variable modulus of subgrade reaction / V. I. Andreev, E. V. Barmenkova, A.V. Matveeva // Applied Mechanics and Materials, 2013. Vols. 351 – 352. pp. 566–569.
10. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — Москва : Физматгиз, 1966. — 636 с.
11. Огибалов, П. М. Оболочки и пластины / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. — Москва : Моск. гос. ун-т, 1969. — 696 с.
12. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности. / А. В. Александров, В. Д. Потапов. — Москва : Высшая школа, 2007. — 400 с.
13. Численные методы в теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абаровский [и др.] ; под. ред. Н. П. Абаровского. — Красноярск : Краснояр. гос. ун-т, 1986. — 384 с.
14. Варвак, П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. / П. М. Варвак, А. П. Варвак. — Москва : Стройиздат, 1977. — 154 с.
15. Кашеварова, Г. Г. Численное моделирование деформирования и разрушения системы «здание — фундамент — основание» / Г. Г. Кашеварова, Н. А. Труфанов. — Екатеринбург-Пермь : УрО РАН, 2005. — 225 с.
16. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. — Москва : Высшая школа, 1978. — 480 с.