

УДК 330.42

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ  
СРОКОВ ЗАМЕНЫ ОБОРУДОВАНИЯ  
НА ПРЕДПРИЯТИИ***И. М. Гедиева*

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация  
[izabella.gedieva@mail.ru](mailto:izabella.gedieva@mail.ru)

Рассматривается задача определения оптимальных сроков замены оборудования на предприятии, основываясь на методе динамического программирования. Решена задача оптимизации, определена максимальная прибыль и найден наилучший вариант срока замены оборудования.

**Ключевые слова:** динамическое программирование, оптимизация, целевая функция, экономический процесс, принцип оптимальности.

**Введение.** В экономике часто сталкиваются с задачами, требующими пошагового решения. Например, при разработке принципов календарного производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию, оптимальном распределении между несколькими предприятиями, разработке планов замены оборудования или долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов.

В таких задачах эффективным является метод динамического программирования (ДП) — это метод оптимизации, в котором процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги) [1]. В отличие от линейного программирования, ДП не имеет определенного набора достаточно универсальных приемов. Некоторые задачи решаются с применением теории графов. Существует метод рекуррентных соотношений, разработанный Р. Беллманом, но часто требуется создание специальных методов решения.

Для того чтобы решить задачу методами ДП необходимо решить отдельные подзадачи, затем объединить их решения в одно общее.

1. Задача оптимизации интерпретируется как  $n$ -шаговый процесс управления.
2. Вводится целевая функция равная сумме целевых функций каждого шага (условие аддитивности).
3. Выбирается управление на  $k$ -ом шаге, которое зависит только от состояния системы к этому шагу и не влияет на предшествующие шаги.
4. Состояние  $S_k$  после  $k$ -го шага управления зависит только от предшествующего состояния  $S_{k-1}$  и управления  $X_k$  (отсутствие последствия).

На каждом шаге управления  $X_k$  зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние  $S_k$  — от конечного числа параметров.

UDC 330.42

**DETERMINATION OF OPTIMAL TIME  
FOR EQUIPMENT REPLACEMENT AT  
THE ENTERPRISE***I. M. Gedieva*

Don State Technical University, Rostov-on-Don,  
Russian Federation

[izabella.gedieval@mail.ru](mailto:izabella.gedieval@mail.ru)

The paper considers the problem of determination of optimal terms for equipment replacement at the enterprise according to the method of dynamic programming. The optimization problem has been solved, the maximum profit has been determined and the best time for the equipment replacement has been found.

**Key words:** dynamic programming, optimization, objective function, economic process, principle of optimality.

Особенностью моделей динамического программирования является то, что увеличение количества переменных в задачах часто влечет рост возможных вариантов решения. Оптимизация выполняет функцию нахождения наилучшего решения среди многих потенциально возможных в соответствии с некоторым критерием эффективности и качества.

Ниже рассматривается задача определения оптимальных сроков замены оборудования на предприятии. Для ее решения привлекается метод динамического программирования.

### **Общая постановка задачи динамического программирования**

По условиям задачи, необходимо так разделить имеющиеся средства, чтобы суммарный доход от их вложения был максимальным.

Задача формулируется следующим образом: определить такое допустимое управление  $X$  ( $X_1, X_2 \dots X_n$ ), приводящее систему  $S$  из состояния  $S_0$  в состояние  $S^\wedge$ . Предполагаем, что управление можно разбить на  $n$ -шаговый процесс.

Обозначим через  $X_k$  управление на  $k$ -ом шаге ( $k=1,2\dots n$ ). Переменные  $X_k$  удовлетворяют некоторым ограничениям ( $X_k$  может быть числом, точкой в  $n$ -мерном пространстве, качественным признаком). Обозначим также через  $S_k$  состояние системы после  $k$ -ого шага управления. Следовательно, получаем последовательность состояний —  $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, \dots, S_{n-1}, S_n=S^\wedge$ .

Показатель эффективности рассматриваемой управляемой операции — целевая функция — зависит от начального состояния и управления.

$$Z=F(S_0, X)$$

Под словом «эффективность» авторы понимают результат, выражающий показатель, который в свою очередь желательно максимизировать (прибыль, производительность) или минимизировать (затраты, себестоимость, потери).

На практике преимущественно используются следующие допущения.

1. Состояние  $S_k$  системы в конце  $k$ -ого шага зависит только от предшествующего состояния  $S_{k-1}$  и управления на  $k$ -ом шаге  $X_k$ . Данное требование называется «отсутствие последствия». Это положение можно записать в виде следующего уравнения:

$$S_k=f_k(S_{k-1}, X_k), k=1,2,\dots,n.$$

Данные уравнения называются уравнениями состояний.

2. Целевая функция является аддитивной от показателя эффективности каждого шага. Обозначим эффективность  $k$ -го шага через

$$Z_k=f_k(S_{k-1}, X_k), k=1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$Z=\sum f_k(S_{k-1}, X_k), \text{ сумма по } k \text{ от } 1 \text{ до } n.$$

Задачи ДП являются многошаговыми, т. е. их принято разделять на шаги, исходя из рассматриваемой задачи. Так, если имеют дело с временными периодами, то количество шагов будет равно количеству лет, а если рассматриваются предприятия, то количество шагов равно количеству предприятий.

### **Подходы к решению задач ДП**

1. Нисходящее ДП: ситуация, при которой задача разбивается на подзадачи, они решаются, а затем комбинируются для решения исходной.

2. Восходящее ДП: ситуация, при которой все подзадачи, которые понадобятся для решения исходной, просчитываются, а затем используются для построения решения исходной задачи.

**Задача о замене оборудования**

Методы ДП применимы к разработке оптимальной стратегии эксплуатации и своевременной замены оборудования [2]. Пусть необходимо найти оптимальную стратегию эксплуатации оборудования на период продолжительностью 10 лет. При известных  $P = 300$  тыс. руб. (покупная цена оборудования),  $N = 10$  лет,  $S(t) = 0$ . Информация об оборудовании приведена в таблице 1.

Таблица 1

Ценовые параметры оборудования

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(t)	800	800	800	750	750	600	550	550	550	500	400
U(t)	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400

Здесь  $t$  — годы,  $r(t)$  — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста  $t$  лет (тыс. руб),  $U(t)$  — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста  $t$  лет (тыс. руб). Далее размерности «тыс. руб.» будем опускать.

Рассчитываем максимальное значение прибыли. Обозначим под  $C$  условие, при котором оборудование сохраняется; под  $\zeta$  — заменяется.

**1-ый шаг:**

$$Z_{10}(1) = \max(800-310, 0-300+500) = 490 (C)$$

$$Z_{10}(2) = \max(800-320, 200) = 480 (C)$$

$$Z_{10}(3) = \max(750-330, 200) = 420 (C)$$

$$Z_{10}(4) = \max(750-340, 200) = 410 (C)$$

$$Z_{10}(5) = \max(600-350, 200) = 250 (C)$$

$$Z_{10}(6) = \max(550-360, 200) = 200 (\zeta)$$

$$Z_{10}(7) = \max(550-370, 200) = 200(\zeta)$$

$$Z_{10}(8) = \max(550-380, 200) = 200(\zeta)$$

$$Z_{10}(9) = \max(500-390, 200) = 200(\zeta)$$

$$Z_{10}(10) = \max(400-400, 200) = 200 (\zeta)$$

**2-ой шаг.** Возможные состояния  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .

$$Z_9(1) = \max(490+480, 0-300+500+490) = 970 (C)$$

$$Z_9(2) = \max(480+420, 690) = 900 (C)$$

$$Z_9(3) = \max(420+410, 690) = 830 (C)$$

$$Z_9(4) = \max(410+250, 690) = 690 (\zeta)$$

$$Z_9(5) = \max(250+200, 690) = 690(\zeta)$$

$$Z_9(6) = \max(190+200, 690) = 690 (\zeta)$$

$$Z_9(7) = \max(180+200, 690) = 690(\zeta)$$

$$Z_9(8) = \max(170+200, 690) = 690(\zeta)$$

$$Z_9(9) = \max(110+200, 690) = 690(\zeta)$$

Для **3-го шага** возможны состояния  $t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

$$Z_8(1) = \max(490+900, 0-300+500+970) = 1390 (C)$$

$$Z_8(2) = \max(480+830, 1170) = 1310 (C)$$

$$Z_8(3) = \max(420+690, 1170) = 1170(\zeta)$$

$$Z_8(4) = \max(410+690, 1170) = 1170(\zeta)$$

$$Z_8(5) = \max(250+690, 1170) = 1170(\text{ç})$$

$$Z_8(6) = \max(190+690, 1170) = 1170(\text{ç})$$

$$Z_8(7) = \max(180+690, 1170) = 1170(\text{ç})$$

$$Z_8(8) = \max(170+690, 1170) = 1170(\text{ç})$$

**4-ый шаг:**  $k=7$ . Возможны состояния системы  $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

$$Z_7(1) = \max(490+1310, 0-300+500+1390) = 1800 (C)$$

$$Z_7(2) = \max(480+1170, 1590) = 1650 (C)$$

$$Z_7(3) = \max(420+1170, 1590) = 1590 (C/\text{ç})$$

$$Z_7(4) = \max(410+1170, 1590) = 1590(\text{ç})$$

$$Z_7(5) = \max(250+1170, 1590) = 1590(\text{ç})$$

$$Z_7(6) = \max(190+1170, 1590) = 1590(\text{ç})$$

$$Z_7(7) = \max(180+1170, 1590) = 1590(\text{ç})$$

**5-ый шаг:**  $k=6$ . Для 5-го шага возможны состояния системы  $t=1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

$$Z_6(1) = \max(490+1650, 0-300+500+1800) = 2140 (C)$$

$$Z_6(2) = \max(480+1590, 2000) = 2070 (C)$$

$$Z_6(3) = \max(420+1590, 2000) = 2010 (C)$$

$$Z_6(4) = \max(410+1590, 2000) = 2000 (C/\text{ç})$$

$$Z_6(5) = \max(250+1590, 2000) = 2000(\text{ç})$$

$$Z_6(6) = \max(190+1590, 2000) = 2000(\text{ç})$$

**6-ой шаг:**  $k=5$ . Возможные состояния системы  $t=1, 2, 3, 4, 5$ .

$$Z_5(1) = \max(490+2070, 0-300+500+2140) = 2560(C)$$

$$Z_5(2) = \max(480+2010, 2340) = 2490 (C)$$

$$Z_5(3) = \max(420+2000, 2340) = 2420 (C)$$

$$Z_5(4) = \max(410+2000, 2340) = 2410 (C)$$

$$Z_5(5) = \max(250+2000, 2340) = 2340(\text{ç})$$

**7-й шаг:**  $k=4$ , возможные состояния системы  $t=1, 2, 3, 4$ .

$$Z_4(1) = \max(490+2490, 0-300+500+2560) = 2980(C)$$

$$Z_4(2) = \max(480+2420, 2760) = 2900 (C)$$

$$Z_4(3) = \max(420+2410, 2760) = 2830 (C)$$

$$Z_4(4) = \max(410+2340, 2760) = 2760(\text{ç})$$

**8-й шаг:**  $k=3$ . Возможные состояния системы  $t=1, 2, 3$ .

$$Z_3(1) = \max(490+2900, 0-300+500+2980) = 3390(C)$$

$$Z_3(2) = \max(480+2830, 3180) = 3310 (C)$$

$$Z_3(3) = \max(420+2760, 3180) = 3180(\text{ç})$$

**9-ый шаг:**  $k=2$ . Возможные состояния  $t=1, 2$ .

$$Z_2(1) = \max(490+3310, 0-300+500+3390) = 3800(C)$$

$$Z_2(2) = \max(480+3180, 3590) = 3660 (C)$$

10-й шаг:  $k=1$ .

$$Z_1(1) = \max(490+3660, 0-300+500+3800) = 4150 \text{ (С)}$$

Полученные выше результаты вычислений занесем в таблицу 2, где  $k$  — это год эксплуатации, а  $t$  — это возраст оборудования.

Таблица 2

Итоговая таблица оптимизации срока замены оборудования

$t \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4150									
2	3800	3660								
3	3390	3310	3180							
4	2980	2900	2830	2760						
5	2560	2490	2420	2410	2140					
6	2140	2070	2010	2000	2000	2000				
7	1800	1650	1590	1590	1590	1590	1590			
8	1390	1310	1170	1170	1170	1170	1170	1170		
9	970	900	830	690	690	690	690	690	690	
10	490	480	420	410	250	200	200	200	200	200

**Заключение.** С привлечением метода динамического программирования рассчитали, что в плановом периоде эксплуатации в течение 10 лет целесообразно заменить оборудование в начале 3-го и 7-го годов. При этом максимальная прибыль составит 4150 тыс. руб.

#### Библиографический список

1. Беллман, Р. Э. Динамическое программирование / Р. Э. Беллман. — Москва : Изд-во иностранной литературы, 1960. — 400 с.
2. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике. Учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]. — Москва : ЮНИТИ, 2005. — 407 с.